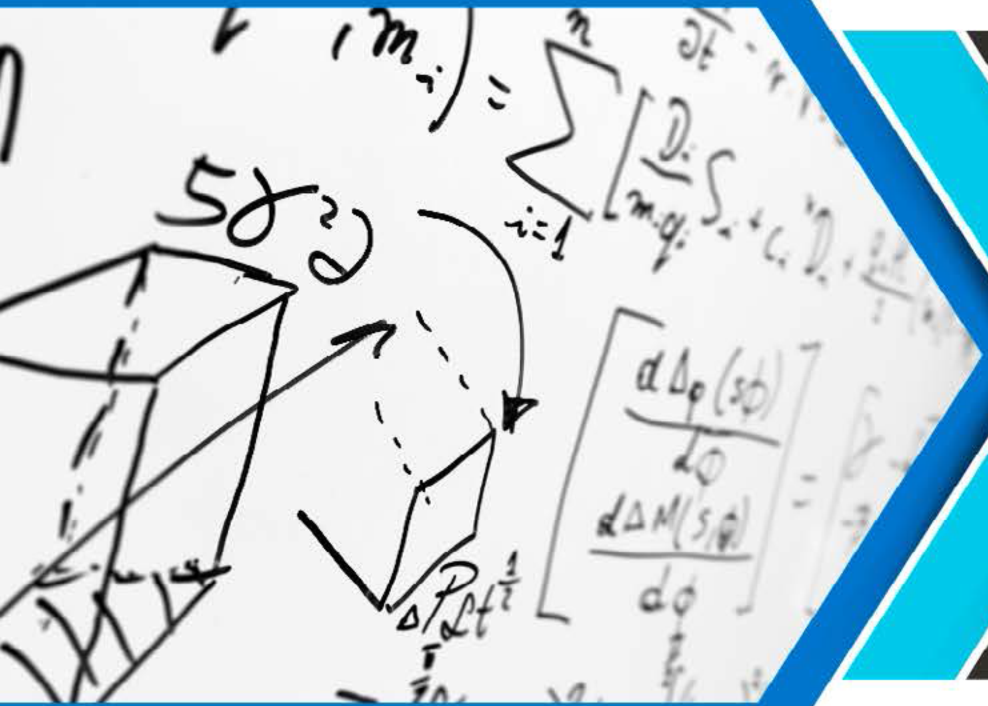
Universidad Nacional
de Entre Ríos



2019

CURSO DE AMBIENTACIÓN A LA VIDA UNIVERSITARIA

Módulo: Matemática

Universidad Nacional
de **Entre Ríos**

NOTAS

PRESENTACIÓN[1]

"La Matemática es el lenguaje con el cual Dios ha escrito el Universo"

Galileo Galilei

Te damos la bienvenida a este curso de ambientación.
Nuestra propuesta es acercarte algunos contenidos y problemas en los cuales a partir del empleo de algunas herramientas matemáticas, puedas ir avanzando en la comprensión de los conceptos.
El módulo está organizado por temas. En cada sección pondremos a disposición nociones teóricas, simbología, ejercicios a modo de ejemplo y otros para que resuelvas sólo.

¡Adelante!

TEMA 1 PORCENTAJE Y NOTACIÓN CIENTÍFICA.

Recordar
Para obtener un determinado porcentaje, podemos emplear diferentes caminos.
Ejemplo: hallar el 35 % de 270

- **<u>1º forma</u>: usar regla de tres**

100 % __________270
35 % ___________x

$$\text{Luego } x = \frac{35\ \%\ .270}{100\%} = 94{,}50$$

- **<u>2º forma</u>: expresar el porcentaje como fracción cuyo denominador es 100**

35 % equivale a $\frac{35}{100}$ entonces multiplicamos esta fracción por 270.

$$\frac{35}{100}\ .\ 270 = 94{,}50$$

- **<u>3º forma</u>: expresar el porcentaje como nº decimal**

35 % equivale a 0,35 (ya que 35 : 100 = 0,35) entonces multiplicamos
0,35. 270 = 94,50

- **<u>Con calculadora, empleando la tecla %</u>**

Ahora, veamos otro problema.
Calcular el tanto por ciento.
Es decir **¿qué porcentaje representa un nº a de otro *b*?**
Aquí también podemos emplear la regla de tres, o algún camino más breve.
<u>Ejemplo:</u> si el precio de una notebook es $ 15200, y te rebajan $ 1368 por pagarla al contado, ¿qué tanto por ciento te están descontando?

[1] Módulo realizado a partir del trabajo colaborativo entre la Prof. Carina Fusse y docentes de la universidad, bajo la coordinación del Profesor Francisco González y que será utilizado por las facultades de Cs de la Administración, Cs Agropecuarias, Cs de la Alimentación, Bromatología, Cs Económicas, Ingeniería y Cs de la Salud.

En este caso podemos plantear
$15200__________100 %
$1368 ___________x
Resolviendo, se llega a que x = 9 %

- Otra manera $\frac{1368}{15200}$. 100 = 9 %

Tener en cuenta

La expresión "tanto por mil "es una manera de expresar un nº como una fracción de 1.000, o como la décima parte de unporcentaje. Se escribe con el símbolo ‰.
Un 1 por mil se define como: 1‰ = 10^{-3} = 1/ 1000 = 0,001 = 0,1%

Ejemplos donde el uso de números expresados al "por mil" es común:

- *Tasas de natalidad y de mortalidad*. Si en el año x la tasa de natalidad fue del 12 ‰, significa que del 1 de enero del año x al 1 de enero del año x*+1* por cada mil habitantes nacieron 12 niños.

- *Salinidad marina*. Por ejemplo, "la salinidad media es del 35‰".

- *Contenido de alcohol en sangre*. El Control o test de alcoholemia mide la concentración de alcohol en sangre. Se obtiene por medio de un porcentaje de la masa, la masa por el volumen o una combinación. Por ejemplo, el de 0,20% puede significar 2 gramos de alcohol por 1000 gramos de sangre o puede significar 0,2 gramos de alcohol por 100 mililitros de sangre.

Notación científica

Un número está expresado en notación científica, si tiene este formato

a, ... $\boxed{10^n}$

El nº **a** es un dígito entre 1 y 9 inclusive.
Ejemplo **4**, 35. 10^8

Tener en cuenta:
El exponente n, indica la cantidad de cifras a la derecha de la coma si es positivo.
En el ejemplo anterior: 1,35. 10^8 = 135000000
Si n es negativo, indica la cantidad de cifras a la izquierda de la coma.

Ejemplo: 2, 7. 10^{-4}= 0, 00027

Valor numérico	Representación en Notación Científica	Representación numérica
Milbillonésima	10^{-15}	0,000000000000001
Billonésima	10^{-12}	0,000000000001
Milmillonésima	10^{-9}	0,000000001
Millonésima	10^{-6}	0,000001
Milésima	10^{-3}	0,001
Centésima	10^{-2}	0,01
Décima	10^{1}	0,1

Valor numérico	Representación en Notación Científica	Representación numérica
Uno	1	1
Diez	10^{1}	10
Cien	10^{2}	100
Mil	10^{3}	1 000
Millón	10^{6}	1 000 000
Mil millones	10^{9}	1 000 000 000
Billón *	10^{12}	1 000 000 000 000
Mil billones	10^{15}	1 000 000 000 000 000
Trillón	10^{18}	1 000 000 000 000 000 000

**En Estados Unidos 10^{9} se denomina "billón". Para el resto de los países de habla hispana 10^{9} equivale a "mil millones", mientras que el billón se representa como 10^{12}.*

Ejercicios para el alumno

1) Resolver

a) 80% de 106 = b) 10% de 47= c) 90% de 134 =

2) Qué tanto por ciento es:

a) 20 de 1500? b) 3 de 1,5? c) 0,15 de 30?

3) Sabemos que el 50% de una cantidad equivale a ½ de la misma. ¿Qué fracción equivale al:

a) 75% b)30% c) 150% d)250% ?

4) El año anterior, en una región eran 184.300 los desocupados. Si se sabe que este año la desocupación ha disminuido el 19% ¿cuántos desocupados hay ahora?

5) En un pantano había el mes pasado 340 hl de agua. Este mes ha disminuido un 43% ¿Cuánta agua queda en el pantano? *Recordar: 1 hectolitro (hl) son 100 litros.*

6) En un país, la población era de 30 millones de habitantes en el 1980. Ahora son 37 millones. ¿Cuál fue el % de aumento?

7) Expresar en notación científica los siguientes valores:

Masa de la Tierra 5.983.000.000.000.000.000.000.000 kg =..............

Diámetro del Sol 1.391.000 km =.......................

Tamaño de un microbio 0,000004 cm =..................

Tamaño de un virus	0,00000002 cm=............
Tamaño de lo glóbulos rojos	0,0000075 mm=...............
Tamaño de una bacteria	0,0000002 mm=.............
Diámetro del ADN	0,0000000002 mm=...........
Diámetro de un Protón	0,000000000000001 mm=............
Masa de un Neutrón	0,0000000000000000000000000017 mm=.............

TEMA 2 CONJUNTOS NUMÉRICOS. PROPIEDADES. OPERACIONES.

1.Números Naturales

Simbólicamente: N

Desde épocas inmemoriales, el hombre debió satisfacer su necesidad de contar objetos, personas, animales, con lo que convivía cotidianamente. Para hacerlo, por intuición comenzó a usar los números que llamamos naturales: 1, 2, 3, 4,..., asociados al concepto de cantidad.

Por tanto es el conjunto de números que utilizamos para contar. No tiene último elemento, por ello decimos que es un conjunto infinito. El primer número natural es el "1" pero a veces resulta necesario incluir al cero dentro del conjunto; en este caso escribimos N_0.

Entre dos números naturales cualesquiera existe un número finito de números naturales. Por eso es un conjunto **discreto**.

Los números naturales se pueden ordenar de menor a mayor o viceversa por eso es un conjunto **ordenado**.

Siempre es posible determinar el siguiente de un número natural, definido como **"n + 1"**.

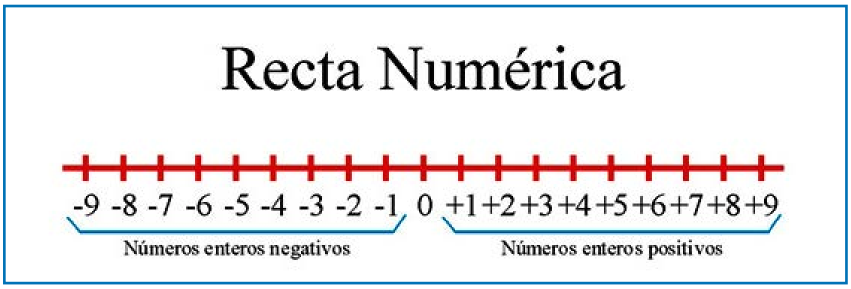
2. Números Enteros.

Simbólicamente: Z

Luego con el tiempo al hombre se le presentaron otros problemas, que para resolverlos ya no le era suficiente el conjunto de los números naturales...

¿Cómo indicar temperaturas bajo 0? ¿Cómo diferenciar alturas y profundidades de la tierra? ¿Cómo expresar que quedó debiendo algo?

Para responder a estas interrogantes, nuevamente recurrió a su inteligencia y formó otro conjunto numérico, en el que podrían expresarse cantidades menores que 0. Es el llamado **conjunto de los números enteros.**



Para los números enteros podemos establecer las siguientes propiedades:

- Es un conjunto ordenado
- Carece de primer elemento.
- Es un conjunto discreto.

3. Números Racionales:

Simbólicamente: Q

Un número racional es aquel que se puede expresar como el cociente de dos enteros: $\frac{a}{b}$ con b distinto de cero.

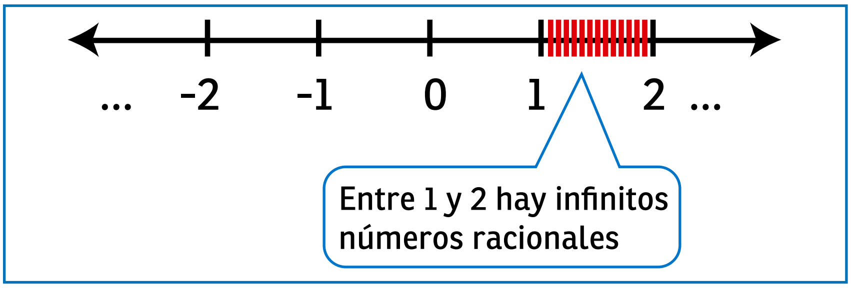
Ejemplos:

3 es racional porque puede expresarse como $\frac{3}{1}$, $\frac{30}{10}$; $\frac{6}{2}$ entre otras posibilidades.

1,25 es racional, puede expresarse como $\frac{125}{100}$; $\frac{5}{4}$ etc.

-2,66666 es racional, puede expresarse como $-\frac{24}{9}$; $-\frac{8}{3}$ etc.

El conjunto de los racionales es un **"conjunto denso"**. Esto significa que entre dos números racionales cualesquiera, existe siempre otro número racional.

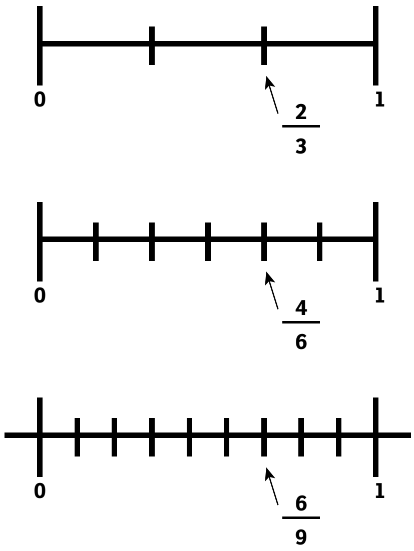


Representación de nº racionales en la recta numérica

Una manera posible es dividir el segmento [0;1] en tantas partes iguales como indica el denominador, y luego considerar tantas veces ese segmento como indique el numerador.

Ejemplo: para representar ⅔ se divide en tres segmentos iguales el segmento que corresponde al intervalo [0;1], luego se toman "2" de esos segmentos.

Pero también puede dividirse el segmento del intervalo [0;1], en 6 partes iguales, y considerar 4. En este caso 4/6 es equivalente a 2/3, y así podemos encontrar infinitas fracciones equivalentes a una dada.



Expresión decimal de un número racional:

Al dividir **a** por **b** (con **b ≠ 0**) se obtiene la expresión decimal de un número racional. El número resultante puede tener un número limitado de cifras decimales, o bien un número infinito pero agrupados en períodos que se repiten.

<u>Ejemplos:</u>

$\frac{2}{5}$ = 0,4 es un nº decimal con **cantidad finita** de cifras decimales (en este caso solo una cifra decimal)

$\frac{5}{3}$ = 1,666....simbólicamente $1,\overset{\frown}{6}$. Es un nº decimal con infinitas cifras decimales que se repiten. Se lla ma nº decimal **periódico puro**.

$\frac{173}{90}$ = 1,9222222 simbólicamente $1,9\overset{\frown}{2}$. En este caso, como las cifras periódicas aparecen luego de otra cifra decimal, el número se llama **periódico mixto.**

Otros ejemplos: $10,12\overset{\frown}{5}$; $0,12\overset{\frown}{53}$

<u>Pasaje de números decimales a fracción.</u>

a) Si el decimal tiene cantidad finita de cifras decimales, se escribe en el numerador el número completo (sin coma), y en el denominador el 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales tengamos.

$0,25 = \frac{25}{100}$ simplificando queda $\frac{1}{4}$

$132,671 = \frac{132671}{1000}$ Esta fracción no puede simplificarse, es irreducible.

b) Si el decimal es periódico puro, en el numerador anotamos el nº completo menos el nº de la parte entera. En el denominador se escriben tantos 9 como cifras periódicas tengamos.

$1,\overset{\frown}{6} = \frac{16 - 1}{9} = \frac{15}{9}$ que simplificando queda $\frac{5}{3}$.

c) En el caso de los nº decimales periódicos mixtos, anotamos en el numerador el nº complet (sin coma) menos el nº formado por las cifras no periódicas. En el denominador escribimos tantos 9 como cifras periódicas haya, seguidos de tantos 0 como cifras no periódicas (luego de la coma) haya.

$1,9\overset{\frown}{2} = \frac{192-19}{90} = \frac{173}{90}$

$10,1\overset{\frown}{25} = \frac{10125 - 1012}{900} = \frac{9113}{900}$

$0,12\overset{\frown}{53} = \frac{1253 - 12}{9900} = \frac{1241}{9900}$

Nº IRRACIONALES:I

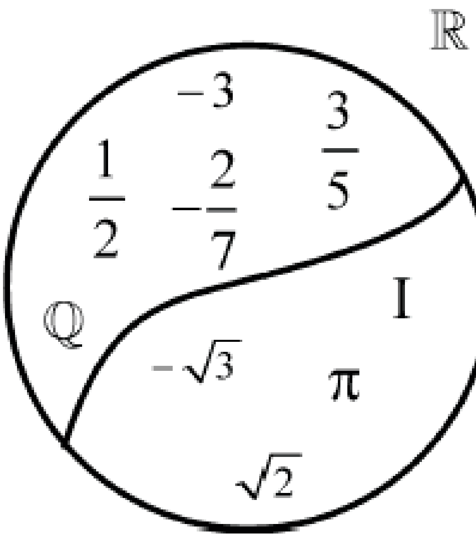
Los números cuya representación decimal es infinita y no periódica no son racionales, o sea, no pueden ser expresados como cociente de dos números enteros. Se denominan irracionales.

Algunos ejemplos:

$\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{5}$; $-\frac{\sqrt{7}}{2}$; $\pi \approx 3{,}14...$ e $\approx$ 2,7188... ; $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ llamado número de oro.

Números Reales $\Re$

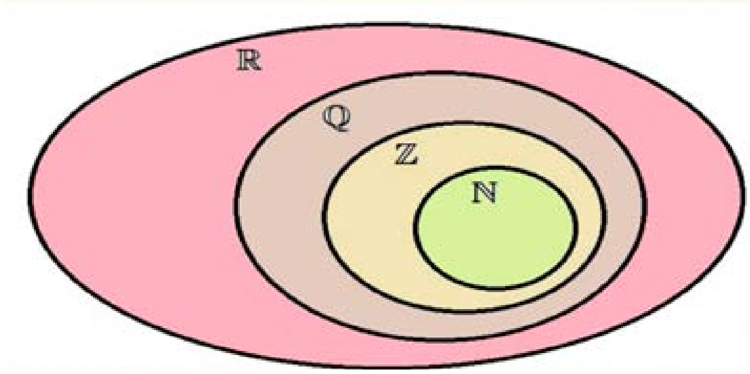
La unión del conjunto de los números racionales y el de los irracionales, da por resultado el conjunto de los números reales.



Entre los números reales y los puntos de una recta existe una correspondencia según la cual, **a cada número real le corresponde un punto de la recta, y, recíprocamente, a cada punto de la recta le corresponde un número real.**

Los nº reales "cubren" totalmente la recta.

El conjunto $\Re$ es también un conjunto denso, porque entre dos números reales cualesquiera existe siempre otro número real.



Valor absoluto de un nº real

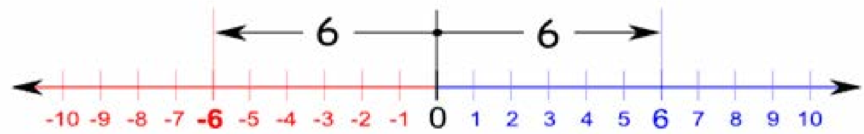
El valor absoluto o módulo de un nº x perteneciente a los reales, se define así:

$$|x| = \begin{cases} x, \; si \; x \geq 0 \\ -x, \; si \; x < 0 \end{cases}$$

En otras palabras, el valor absoluto de un nº positivo o cero, coincide con el mismo número. En cambio si el nº es negativo, su valor absoluto será su opuesto.

Gráficamente, el módulo o valor absoluto de x, indica su distancia hasta el cero, en la recta numérica.

<u>Ejemplo</u>



El valor absoluto de - 6 se escribe |-6 y su valor es 6.

El valor absoluto de 6 se escribe |6 y su valor es 6.

<u>El conjunto de los números complejos C</u>

En el conjunto de los números reales, una ecuación como **$x^2 + 1 = 0$** no tiene solución .

Sí queremos despejar **x**, llegamos a: **$x^2 = -1$** pero no existe ningún número real cuyo cuadrado sea igual a -1.

Para dar solución a expresiones como ésa, se crearon los números imaginarios.

Se define a la **unidad imaginaria** con **i**, y se cumple que:

$i = \sqrt{-1}$ de donde se obtiene $i^2 = 1$

<u>Potencias de i</u>

$$i^0 = 1 \quad i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i$$

La unión del conjunto de los reales y el de los imaginarios, da por resultado el de los números complejos **C**.

En el conjunto C tienen significado las raíces de índice par de números negativos.

Así podemos resolver, por ejemplo:

$\sqrt{-4}$ + $\pm 2i$; $\sqrt{-\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}i$; etc

Un nº complejo puede escribirse en formabinómica:

Z = a + bi (con a y b reales)

a: parte real

bi: parte imaginaria

Observar que:

- ***Si a = 0 tenemos un nº imaginario puro. Ejemplo Z= 6 i***
- ***Si b= 0 tenemos un nº real. Ejemplo Z = 3.***

<u>Clasificación:</u>
Por tanto, si revisamos todos los conjuntos numéricos hasta aquí aprendidos, su orden y clasificación sería el siguiente:

$$\mathbb{C}\ \text{Complejos}\begin{cases}\mathbb{R}\ \text{Reales}\begin{cases}\mathbb{Q}\ \text{Racionales}\begin{cases}\mathbb{Z}\ \text{Enteros}\begin{cases}\mathbb{N}\ \text{Naturales}\\ 0\ \text{Cero}\\ \text{Enteros negativos}\end{cases}\\ \text{Fraccionarios}\end{cases}\\ \mathbb{I}\ \text{Irracionales}\end{cases}\\ \mathbb{IM}\ \text{Imaginarios}\end{cases}$$

Ejercicio

Clasificar los siguientes números de acuerdo al campo numérico al cual pertenecen.

-2: .... 8: ....

1/5: .... $\frac{\pi}{3}$: ....

$\sqrt{-25}$: .... -6 + 2i : ....

<u>Ejemplos resueltos</u>

-3,5 es racional, real (y complejo cuya componente real es cero)
$\sqrt[3]{5}$ es irracional, real y complejo
-5i es complejo (imaginario puro)
2+3i es complejo.

<u>ALGUNAS PROPIEDADES IMPORTANTES DE LAS OPERACIONES EN R</u>

$x^m . x^n = x^{m+n}$	Producto de potencias de igual base
$x^m : x^n = x^{m-n}$	Cociente de potencias de igual base
$(x^m)^n = x^{m.n}$	Potencia de otra potencia
$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$	Raíz de un producto
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	Raíz de un cociente
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$	Raíz de otra raíz

Algunos productos notables

Cuadrado de un binomio
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Trinomio cuadr.perf.

Cubo de un binomio
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Cutrinomiocubo perf.

Producto de una suma por una resta
$(a+b).(a - b) = a^2 - b^2$
Dif. de cuadrados

Tener en cuenta

La potenciación y radicación no son distributivas con respecto a la suma ni a la resta.

Por ejemplo:

$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

Dada una expresión fraccionaria en la que figuran radicales en el denominador, se acostumbra escribir una fracción equivalente que no contenga radicales en el denominador. Este proceso se denomina *racionalización de denominadores.*

Para obtener una fracción equivalente, se multiplica el numerador y el denominador por la misma expresión(esta expresión debe ser conveniente, para que en el denominador podamos obtener un nº real)

Algunos ejemplos:

1) $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

2) $\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

3) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4}$

Si en el denominador figuran sumas o restas con raíces cuadradas, podemos hacer uso de la "diferencia de cuadrados".

4) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$

Ejercicios para el alumno

1) Resolver usando propiedades

a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} =$

b) $(x + 3)^2 =$

c) $(a - 4)^3 =$

d) $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^3 =$

e) $\frac{2^7 \cdot 2^5 \cdot 2^3}{2^{14}} =$

2) ¿Verdadero o falso? Justificar

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8}$

b) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4}$

c) $5\,\sqrt[3]{2} + 4\,\sqrt[3]{2} = 9\,\sqrt[3]{4}$

d) $(-2\sqrt{3})^2 = 12$

e) $\sqrt{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[5]{x}$

3) Racionalizar:

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{6}} =$

b) $\frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} =$

c) $\dfrac{5 - \sqrt{3}}{5 + \sqrt{3}} =$

d) $\dfrac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{\sqrt{11} + \sqrt{3}} =$

TEMA 3 ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

1. Ecuación.

Una ecuación es una igualdad donde por lo menos hay un número desconocido, llamado incógnita o variable, que se cumple para determinado valor numérico de dicha incógnita.

Se denominan ecuaciones lineales o de primer grado a las igualdades algebraicas con incógnitas cuyo exponente es 1 (elevadas a uno, que no se escribe).

Expresión General

Son ecuaciones de primer grado las que pueden expresarse en la forma:

$a\,x + b = 0$ con $a \neq 0$

Procedimiento para su resolución:

- Se reducen los términos semejantes, cuando es posible.

$3x + 12 - x = 17 + 5$
$2x + 12 = 22$

- Se hace la transposición de términos (aplicando inverso aditivo o multiplicativo), los que contengan la incógnita se ubican en un miembro y los que carezcan de ella en el otro.

$2x + 12 - 12 = 22 - 12$

- Se reducen términos semejantes, hasta donde sea posible.

$2x = 10$

- Se despeja la incógnita, dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita (inverso multiplicativo), y se simplifica.

$\dfrac{2x}{2} = \dfrac{10}{2} \longrightarrow x = 5$

¡Recordar!

Siempre podemos verificar su correcta resolución reemplazando la incógnita por el valor hallado y verificando que se cumple la igualdad.

En el ejemplo:

$2.5 + 12 = 22$
$10 + 12 = 22$
$22 = 22$

¡Verificado!

Ecuaciones sin solución/con infinitas soluciones.

¿Se han hecho alguna vez las siguientes preguntas?

a) ¿Puede ocurrir que una ecuación no tenga solución?

Si, puede ocurrir. Veamos un caso:

Si se tiene la ecuación $5x - 7 = 2(2x - 3) + x$, para resolver hacemos:

$5x - 7 = 4x - 6 + x$
$5x - 4x - x = - 6 + 7$
$0x = 1$

Llegamos así a un absurdo, ya que para cualquier número x, se verifica que $0x = 0$. Se dice entonces que ***la ecuación no tiene solución.***

b) ¿Puede ocurrir que una ecuación tenga infinitas soluciones?

También puede ocurrir. Veamos un ejemplo:

Dada la ecuación $3(2x - 1) - x + 4 = 5x + 1$, para resolver hacemos:
$6x - 3 - x + 4 = 5x + 1$
$6x - x - 5x = 1 + 3 - 4$
$0x = 0$
Esta igualdad a la que llegamos se verifica para todo valor de x. Se dice que la ecuación dad es una identidad y tiene infinitas soluciones.

Ejercicios

1) Resuelva las siguientes ecuaciones y verifique:

$a)\ 3(x-2)-x=8$

$b)\ 4(-x-1)+5x-2=-2x-x$

$c)\ 6x+2(1+x)=3x-8+x-2$

$d)\ -5(x+8)+2=-38-3x-2x$

$e)\ 13x-2(5x+2)=2(x+2)+x$

$f)\ \dfrac{2x}{3}+2=4$

$g)\ -2\dfrac{x+1}{3}=2-x$

$h)\ 4-\dfrac{-4-x}{-3}=10$

$i)\ x+\dfrac{2x-3}{9}+\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{12x+4}{9}$

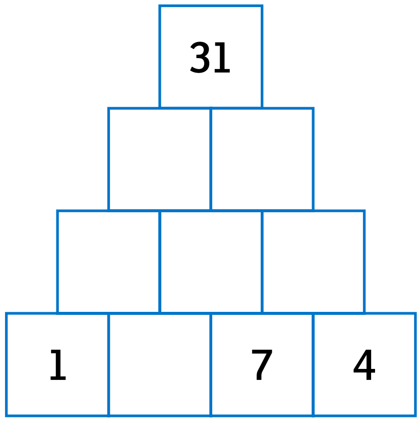
$j)\ \dfrac{x-2}{x+3}-\dfrac{x+1}{x-3}=\dfrac{5}{x^2-9}$

$k)\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{x}{3}-\dfrac{-2x+9}{4}$

$l)\ \dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x+5}{x^2-1}=\dfrac{x}{x+1}$

2) Resuelva los siguientes problemas planteando una ecuación de primer grado.

Problema 1: **Reconstruyendo la pirámide.**
En la pirámide de la figura el valor década casillero es la suma de los números de los dos casilleros que están debajo suyo, salvo, claramente, para la fila inferior. Algunos casilleros ya están completados, ¿podrían completar el resto?



Problema 2: **Oferta de revistas.**
Guillermo compro 100 revistas para vender en su local. Vendió las primeras a $12 cada una, pero como había pocas ventas decidió bajar el precio a $8 por revista. Por la venta de todas las revistas recaudó $884. ¿Cuántas vendió a $12?

Problema 3:**La liebre y la tortuga**
Una deportiva liebre y una perseverante tortuga participan de una carrera. La liebre corre a una velocidad de 27 km/h, mientras que la tortuga lo hace a 2 km/h. Luego de iniciarse la carrera, la liebre, al ver que había dejado a la tortuga varios metros atrás y confiada de que podía ganar fácilmente la carrera, se acostó a dormir bajo un frondoso ombú. Luego de 30 minutos de siesta, la liebre despertó sólo para darse cuenta que la tortuga la había superado. A pesar de que siguió corriendo a máxima velocidad, la tortuga le ganó por una cabeza. ¿Qué longitud tenía la carrera? Nota: recordar cómo se relacionan la velocidad, tiempo y distancia: $d = v.t$.

Problema 4: **No se le pregunta la edad a una dama.**
Cristina fue al médico para hacerse un examen de rutina. Cuando estaba completando la ficha de datos el médico le preguntó:
Medico: ¿Me podría decir su edad?
Cristina: Ay... no debería preguntarle eso a una dama. Lo único que le puedo decir es que tengo el triple de años que mi hijo José, y dentro de 11 años tendré el doble de él.
¿Podría ayudar al médico a averiguar la edad de Cristina?

Problema 5:**Jugando al casino.**
Tres amigos: Adrián, Beltrán y Carlos fueron al casino. Luego de jugar notaron que:
- Entre los tres ganaron $220 (además de lo que tenían).
-Si Carlos hubiera ganado $8 menos, Beltrán $4 más y Adrian la mitad, entonces todos hubieran ganado lo mismo.
¿Cuánto dinero ganó cada uno?

Problema 6:**Retiro de efectivo.**
María fue al banco a retirar dinero porque necesitaba cambio para su negocio. Le dieron billetes de $50, de $20 y de $2. La cantidad de billetes de $50 fue la mitad que los de $20. Además tenía 6 billetes más de $2 que de $50. En total le dieron 50 billetes. ¿Cuántos billetes de cada clase tenía María? ¿Cuánto dinero retiró del banco?

Problema 7:**Inflación.**
Durante el último año el litro de nafta super tuvo dos aumentos; el primero del 8% y el segundo del 10%. Si el precio actual es de $21.90 el litro, encuentre cuál era su precio al comienzo del año.

Problema 8: **Viaje a la Luna.**
Una nave espacial va de la tierra a la Luna; distantes a 380.000 Km, a velocidad constante. Al regreso hace la quinta parte del camino a la misma velocidad que llevaba a la ida y en el resto del camino, reduce su velocidad a la mitad para ahorrar el poco combustible que le quedaba. Si en el viaje de regreso tarde 6 dias, ¿A qué velocidad viajó a la ida?

3)Los siguientes son problemas geométricos, al igual que los casos anteriores, resuélvelos planteando una ecuación.

a) En el triángulo *ABC*, A tiene 54° y B supera a C en 23°. Encuentre el valor de B y C.
b) El perímetro de un rectángulo es de 318 *cm*. El largo supera al ancho en 11 *cm*. Calcule las dimensiones del rectángulo.
c) El perímetro de un triángulo isósceles es de 2.57 *m*. Los lados iguales superan a la base en 28 *cm*. Calcule el valor de cada lado.
d) El perímetro de un campo rectangular es de 1.220 *m*. Si uno de los lados mide 150 *m*. más que el otro, ¿Cuánto mide cada lado?
e) El perímetro de un triángulo es de 209 cm. Uno de sus lados mide 20 cm. más que cada uno de los otros dos. ¿Cuánto mide cada lado?

SOLUCIONES:

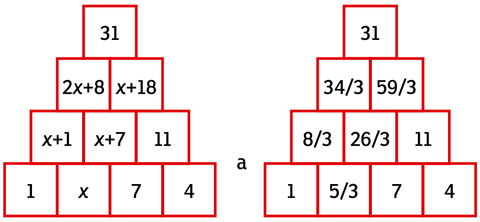
1) a) $x=7$ b) $x=\frac{3}{2}$ c) $x=-3$ d) todos los $\mathbb{R}$

e) no tiene solución f) $x=3$ g) $x=8$

h) $x=-22$ i) $x=5$ j) $x=-\frac{2}{9}$ k) no tiene solución

l) $x=2$

2)
Problema 1: (2x + 8) + (x + 18) = 31
$x = \frac{5}{3}$



Problema 2: Guillermo vendió 21 revistas a $12 y las 79restantes a $8.
2*x* + 8 (100 - *x*) = 884
x= 21

Problema 3: La carrera duró 0,54 horas. La tortuga anduvo a 2km/h durante 0,54 hs, por lo que la distancia recorrida fue de 1,08 km.
2*t* = 27 (*t* - 0,5) ; *t*= 0,54 ; 2.0,54 = 1,08 *km*.

Problema 4: José tiene en este momento 11 años y por ende Cristina tiene 33 (el triple que José). Dentro de 11 años José tendrá 22 años y Cristina 44 años (justo el doble).

$3J+11=2(J+11)$ $\quad$ $3\,.\,11+11=2(11+11)$
$J=11$ $\quad$ $44=44$

Problema 5: Adrián ganó $108, Beltrán $50 y Carlos $62.
2*x* + (*x* - 4) + (*x* + 8) = 220
x = 54

Problema 6: María recibió 17 billetes de $2, 22biletes de $20 y 11 de $50. En total retiró $1024.
X=cantidad de billetes de $50 ⟶ *x* + 2*x* + (*x* + 6) =50

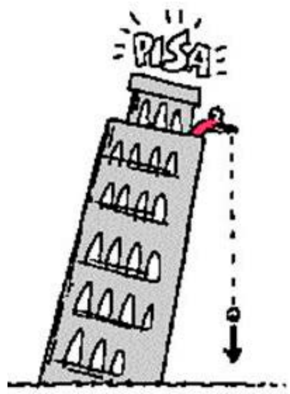
Problema 7: El precio del litro de nafta super era de $18,43 $/litro a comienzo del año.
(1,08 *x*) 1,10 = 21,90
x = 18,43

Problema 8: A la ida viajó a 4750 km/h.
3)
a) B=74° 30´; C=51° 30´ b) largo 85 cm; ancho 74 cm
c) base 67 cm; lados 95 cm d) lado menor: 230 m; lado mayor: 3380 m
e) lados iguales 63 cm; lado mayor: 83 cm.

TEMA 4 FUNCIONES

La primera función

El primero en construir una función fue Galileo (1564-1642). Desde lo alto de la torre inclinada de Pisa tiró dos esferitas, una de hierro y otra de madera y comprobó que a pesar de la diferencia de peso, ambas llegaban al suelo a la vez, había descubierto ***la ley de caída de los cuerpos****. ontinuando su estudio y empleando un curioso artilugio, comprobó que el espacio recorrido depende del cuadrado del tiempo, escribiendo la primera función de la historia.*



La primera definición formal de función se debe al matemático ***Euler****, quien en el libro Introductio in analysisinfinitorum, publicado en 1748, dice: "Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números o cantidades constantes". En 1755 en Institutionescalculidifferentialis, vuelve sobre el tema acercándose más a la que hoy utilizamos.*

Una función es una correspondencia o relación entre dos conjuntos que a cada elemento del primer conjunto hace corresponder un único elemento del segundo conjunto.

El primer conjunto es el dominio de la función, el segundo, es el codominio.

El conjunto de resultados de la función, se denomina conjunto imagen.

En general se expresa y= f(x)

X : variable independiente (se ubica en el eje horizontal o de abscisas)
Y: variable dependiente (se ubica en el eje vertical o de ordenadas)

En ocasiones las variables x e y pueden tomar otros nombres.
Es el caso del siguiente ejemplo, en el cual se consideran el tiempo y la dosis de un medicamento.

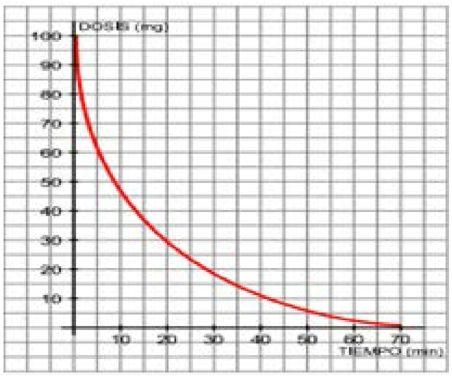
Ejemplo 1

A un paciente se le suministra anestesia.

El gráfico muestra cuántos mg van quedando en el cuerpo a medida que pasa el tiempo.

Primero observemos que esta relación vincula dos variables:

- El tiempo en minutos (variable independiente)
- La dosis de anestesia en miligramos (variable dependiente)



Es una FUNCIÓN, porque a cada valor del tiempo, le corresponde un único valor de dosis de anestesia.

Si nos piden la cantidad de anestesia que queda en el paciente en el minuto 20, observamos que para t=20 su imagen (resultado en el eje vertical) es 30 mg.

Esto puede anotarse así f(20)=30

También podemos analizar cuál fue la dosis inicial de anestesia.

En este caso se nos pide f(0), o sea , en el instante cero cuántos mg había. Observando la gráfica se obtiene 100 mg. Así f(0)=100

Ejemplo 2 para el alumno

La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por la ecuación: $F = \frac{9}{5}C + 32$

a) Representar gráficamente la ecuación con los valores en grados Celsius en el eje horizontal y Fahrenheit en el vertical. Ayuda: pueden calcular cuántos grados farenheit corresponden 0ºC, 10ºC y 40ºC.
b) Esta relación ¿es una función? ¿Por qué?
c) ¿Cuál es la imagen de 20? ¿Qué indica en este caso?

TEMA 5 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

1º) FUNCIONES LINEALES

Tienen la forma $\boxed{y = f(x) = mx + b}$ **siendo m y b números reales.**

Su representación gráfica es una recta (no vertical)

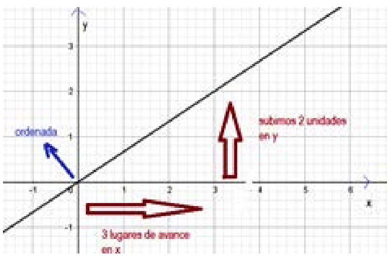
b: ordenada al origen. Es el valor de y, cuando x vale 0.
m: indica la inclinación o pendiente de la recta.

Fórmula para la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\textit{cambio en } y \textit{(cambio vertical)}}{\textit{cambio en } x \textit{(cambio horizontal)}}$$

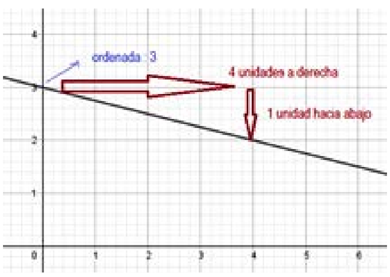
EJEMPLOS

a) $y = \frac{2}{3}x$



Observación: la pendiente es positiva, tenemos una función lineal CRECIENTE.

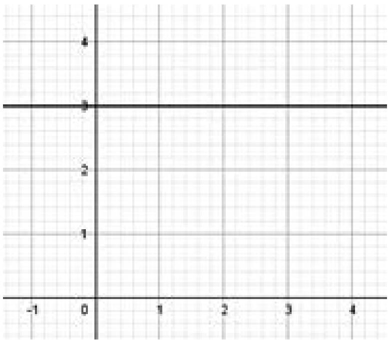
b) $y = -\frac{1}{4}x + 3$



Observación: la pendiente es negativa, tenemos una función lineal DECRECIENTE

c) y = 3

En este caso tenemos una función constante, la pendiente es cero.

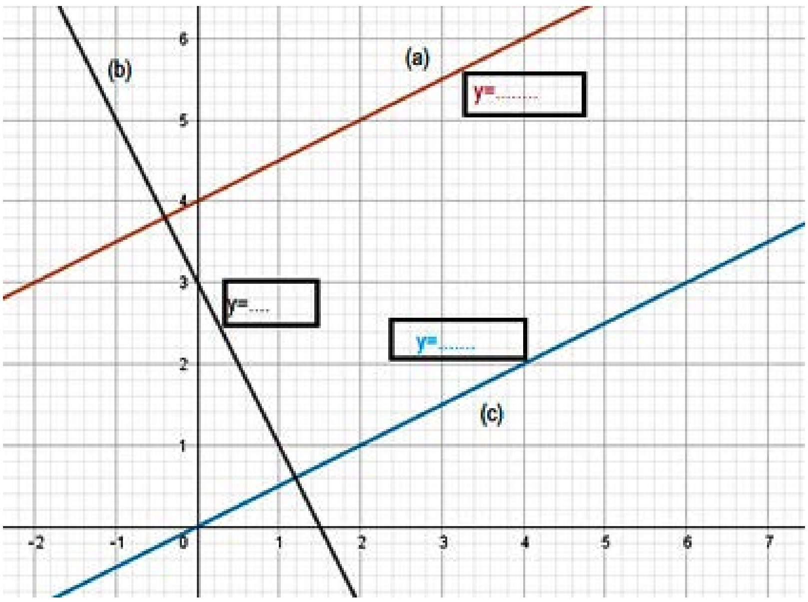


Ejercicios para el alumno

(I)Graficar las siguientes funciones lineales, indicando: ordenada, pendiente y si son crecientes, decrecientes o constantes.

1) y= -2x +3
2) y= x + 5
3) y=-1/3 x
4) y= -4

(II) Hallar las ecuaciones de las siguientes rectas.



(III) Analizando las gráficas del ítem (II) qué puedes deducir acerca de la posición de dos rectas si:

- sus pendientes son iguales.
- Sus pendientes son opuestas e inversas.

(IV)En una fábrica de relojes para taxis deben programar los relojes para lo cual quieren encontrar una función que les permita conocer el precio del viaje de acuerdo con los metros recorridos.
Suponer que se cobra $30 la bajada de bandera y
$ 5 por cada 100 metros recorridos.

a)¿Qué fórmula deberán programar?

b) ¿Cuánto deberán cobrar por un recorrido de 1,5 km?

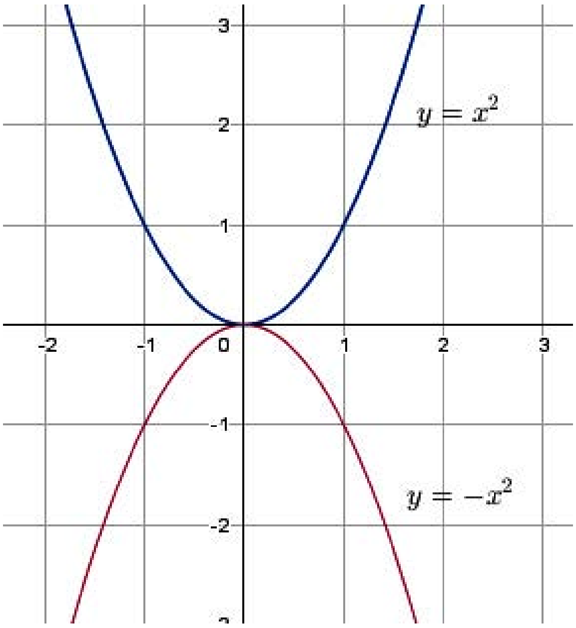
2º) FUNCIONES CUADRÁTICAS

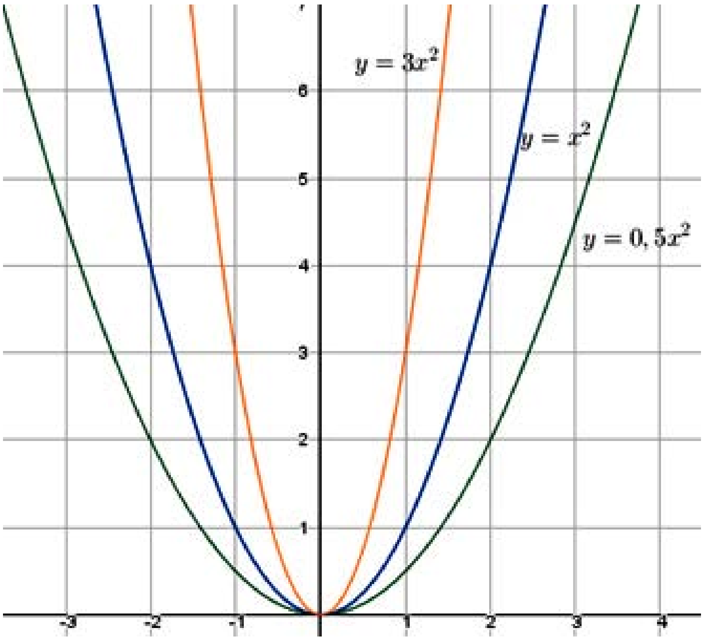
Son de la forma $\boxed{y=f(x)= ax^2 + bx + c}$ con **a, b, c** reales y **a** distinto de cero

Su representación gráfica es una parábola.

Ejemplos:

a) $y = x^2$ **b) $y= - x^2$** **c) $y = 3x^2$** **d) $y = 0.5x^2$**





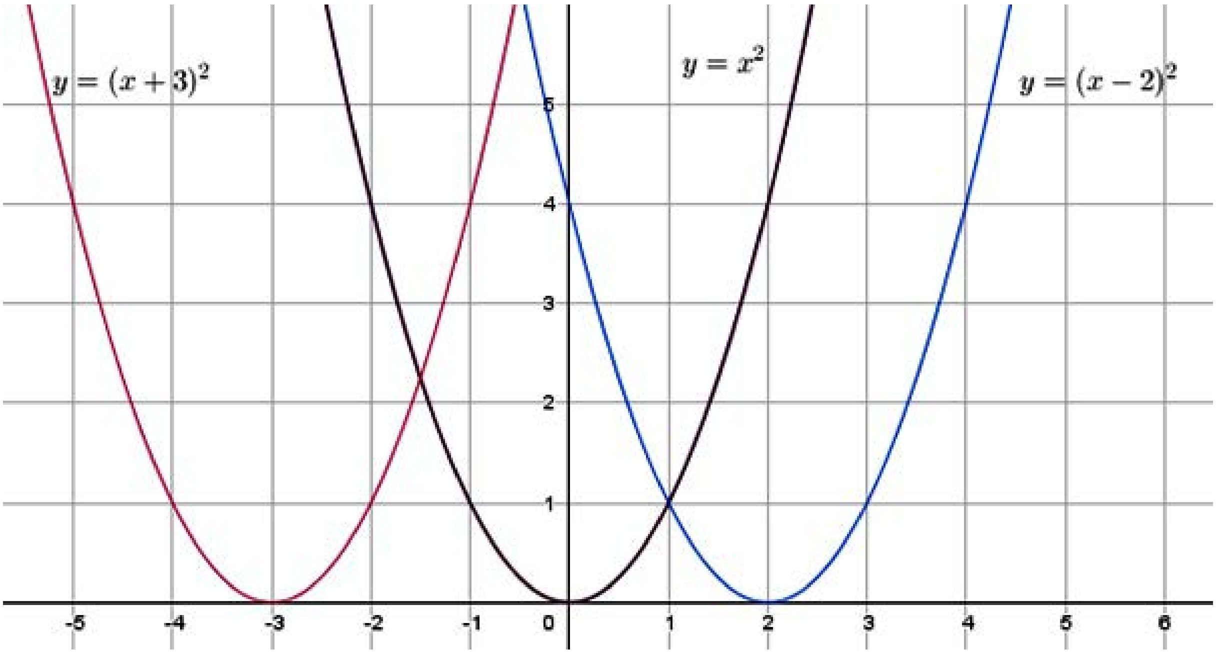
Observaciones

-si a > 0 las ramas de la parábola se abren hacia arriba
-si a < 0 las ramas se abren hacia abajo.
-Si 0 < |a| <1 la parábola se "ensancha", sus ramas se acercan más al eje x
-si |a| > 1 la parábola se "cierra", sus ramas se acercan más al eje y
-Todas estas parábolas tienen su vértice en el punto (0;0). Dicho vértice será un mínimo, cuando a > 0, y será un máximo cuando a < 0.

Traslaciones horizontales y verticales.

Observemos los siguientes ejemplos y sus respectivas gráficas.

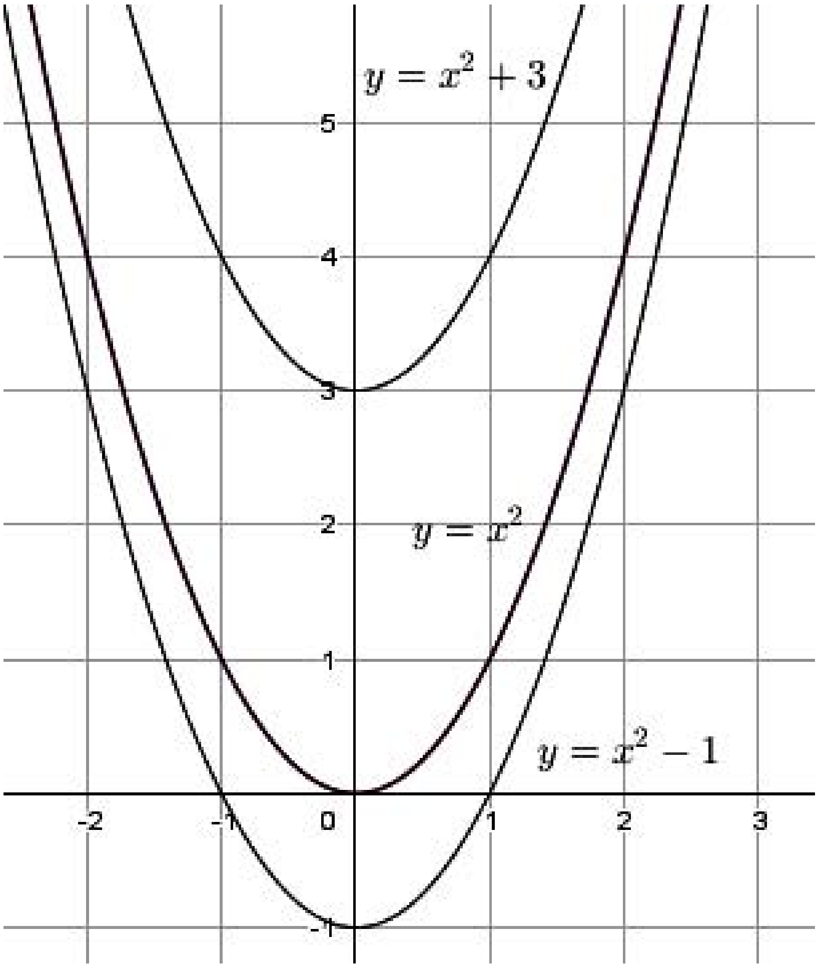
$y=(x+3)^2$ $y=x^2$ $y=(x-2)^2$



Podemos apreciar que las tres parábolas tienen la misma forma, sin embargo ha cambiado la posición. La parábola $y=(x-2)^2$ tiene la misma que $y=x^2$ pero trasladada hacia la derecha 2 unidades. Su vértices es el punto (2;0).

En cambio $y=(x+3)^2$ es la trasladada de $y=x^2$, pero en este caso 3 unidades a izquierda. Su vértice es V=(-3;0)

Ahora observemos las siguientes gráficas :



En este caso las tres parábolas son idénticas en su forma, pero se han trasladado verticalmente, tantas unidades como indica el término independiente.

Gráfico de una función cuadrática del tipo y = ax2+bx+c

Para realizar el gráfico de la parábola a partir de su expresión polinómica, podemos armar tablas de valores *(método algo engorroso)*, recurrir a graficadores, o también calcular algunos puntos de dicha gráfica con algunas fórmulas.

Veamos el siguiente caso:

$y = 2x^2 - 10x + 12$

1º) Calculamos las intersecciones de la parábola con el eje x (llamados ceros o raíces) empleando la fórmula "resolvente"

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

en este ejemplo queda $x = \dfrac{-(-10) \pm \sqrt{100 - 4.2.12}}{2.2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{4} = \dfrac{10 \pm \sqrt{4}}{4}$

Al resolver encontramos dos soluciones:

$x_1 = 3 \quad x_2 = 2$

2º) Calculamos las coordenadas del vértice de la parábola

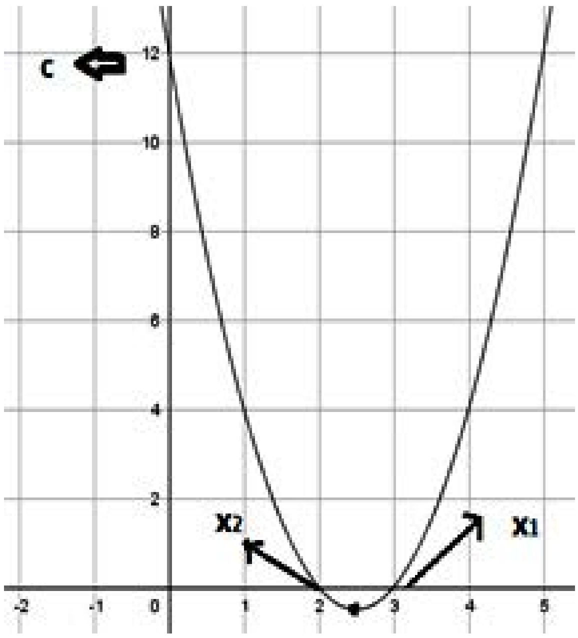
$V=(x_v;\ y_v)$

$x_v = \frac{-b}{2a}$

para hallar y_v, se reemplaza el valor de x_v en la fórmula inicial, o sea, hacemos $f(x_v)$.En nuestro ejemplo queda:
x_v= -(-10) /2.2 = 10/4= 2,5
y_v= 2 $(2,5)^2$ -10 . 2,5 + 12 = - 0,5
Entonces V=(2,5 ; -0,5)

3º) Calculamos la intersección de la parábola con el eje y (ordenada)
Se reemplaza la letra x, por cero.
Si tenemos la expresión polinómica, la ordenada viene indicada por el valor de "c". En nuestro ejemplo es 12.

Gráfico



Ejercicios

Graficar, indicando vértice y raíces

1) $y= -x^2-4x$ 2) $y= x^2 -4x +4$ 3) $y= - 2x^2 – 8$ 4) $y=x^2 -6x +8$

Un problema aplicado
Un grupo de biólogos estudia las características de un lago artificial, en el cual introdujeron un conjunto de peces para analizar su evolución.
La fórmula **$y = - 0,1\ x^2 + 10x + 240$** permite hallar aproximadamente el nº de peces (y) a medida que pasan los días (x) .

a)Graficar.
b)¿cuántos peces se introdujeron inicialmente?
c)¿Durante cuánto tiempo la cantidad de peces fue aumentando?
d)¿Cuál fue la cantidad máxima de peces que llegó a haber y en qué momento?
e)¿Cuándo se extinguiría esa población?

TEMA 6 SISTEMAS DE 2 ECUACIONES LINEALES CON 2 INCÓGNITAS

6.1. Introducción.

En los modelos simplificados de la estadística, la economía, la física y la ingeniería aparecen con mucha frecuencia sistemas lineales de ecuaciones. En este curso introductorio sólo nos detenemos a analizar los sistemas formados por **dos ecuaciones y dos incógnitas** (también llamados sistemas de *2x2*). Sin embargo los hay mucho más complejos, más adelante en la carrera usted verá sistemas cuadrados más grandes (por ejemplo de 3x3) y hasta incluso sistemas no cuadrados (por ejemplo de *2x3 o 3x2*).

Consideremos el conjunto de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Ambas ecuaciones son de primer grado se dice que es un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Para indicar que forman un sistema se abarcan con una llave.

Tenemos infinitos pares de valores que verifican la primera igualdad ($x + y = 4$):
(2;2), (-2;6), (3;1), (0;4)...

Lo mismo ocurre con la segunda ecuación ($x - y = 2$):
(4;2), (2;0), (3;1), (6;4)...

Pero, ¿todas estas soluciones satisfacen a ambas ecuaciones simultáneamente?

6.2. Resolver un Sistema:

Resolver un sistema lineal significa hallar **todos** los valores de las incógnitas (en nuestro caso serán x e y) que sean **simultáneamente** solución de todas las ecuaciones del sistema. Al conjunto de todas las soluciones de un sistema lo llamaremos el **conjunto solución** del mismo.

Tomando el ejemplo anterior observamos que a pesar que existan infinitas soluciones para cada ecuación tomada individualmente, existe un único par de valores que satisface a ambas ecuaciones simultáneamente: (3;1).

Decimos entonces que $x = 3; y = 1$ es la solución o conjunto solución del sistema planteado en el ejemplo.

6.3 Métodos de resolución de sistemas.

6.3.1 Método de Sustitución:

Este método de resolución de sistemas de ecuaciones consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir en la otra.

Describamos los pasos a realizar para aplicar este método:

1°. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
2°. Se sustituye la expresión de ésta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.
3°. Se resuelve esta ecuación.
4°. El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.
5°. Se ha obtenido, así, la solución.

Veamos un ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 5 & 1) \\ 2x - y = 7 & 2) \end{cases}$$

1° Despejamos una de las incógnitas en ambas ecuaciones.
Por ejemplo despejo la y en 1) $y = 5 - x$
2° Sustituimos en 2) y nos queda: 2) $2x - (5 - x) = 7$
3° Resolvemos: $2x - (5 - x) = 7$
$2\,x - 5 + + x = 7$
$3\,x = 7 + 5$
$x = 12/3$
$x = 4$

4° Sustituyendo este valor de x en la incógnita despejada en el paso 1° tenemos:
$y = 5 - 4$
$y = 1$

5° La solución del sistema es (4;1). Este es el punto donde se cortan ambas rectas.

6.3.2 Método de reducción por suma o resta.

Este método consiste en preparar las dos ecuaciones para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas. Restando las ecuaciones resultantes, miembro a miembro, se obtiene una ecuación con sólo una incógnita (se ha **reducido** el número de incógnitas).
Resumamos los pasos que debemos realizar:

1° Se preparan las dos ecuaciones multiplicándolas por el número que convenga.
2° Al sumarlas o restarlas desaparece una de las incógnitas.
3° Se resuelve la ecuación resultante.
4° El valor obtenido se sustituye en una de las iniciales y se resuelve.
5° Se obtiene así la solución.

<u>Observación:</u> El método de reducción es muy cómodo de aplicar cuando una de las incógnitas tiene el mismo coeficiente en las dos ecuaciones o bien sus coeficientes son uno múltiplo del otro. De no darse estas condiciones puede que sea conveniente aplicar en su lugar el método de sustitución.

Veamos un ejemplo:

1° Multiplicamos la ecuación 1) por 2.
2° Sumamos las ecuaciones y eliminamos la variable y.
3° Resolvemos y obtenemos $x = 5$
4° Hallamos el valor de y reemplazando el valor de x en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales. Elegimos reemplazarla en 1) y obtenemos $y = 0$.
5° Se obtiene así la solución: (5;0).

$$\begin{cases} 3x - y = 15 & 1) \\ x + 2y = 5 & 2) \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 6x - 2y = 30 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} 7x + 0y = 35 & \qquad 3\,(5) - y = 15 \\ 7x \;= 35 & \qquad 15 - y = 15 \\ x = 35/7 & \qquad y = 15 - 15 \\ x = 5 & \qquad y = 0 \end{array}$$

<u>Observación:</u> Siempre es conveniente verificar que la solución satisface ambas ecuaciones.

6.3.3 Método de Igualación

Dado el sistema $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ para resolverlo procedemos así:

1° Despejamos una de las dos incógnitas (la misma) en ambas ecuaciones:
$x + y = 4$ $x - y = 2$
$y = 4 - x$ $- y = 2 - x$
$y = -2 + x$

2° Igualamos las expresiones obtenidas:
$4 - x = -2 + x$

3° Resolvemos la ecuación obtenida:
$4 - x = -2 + x$
$- x - x = -2 -4$
$-2\,x = -6$
$x = -6 : (-2)$
$x = 3$

4° Reemplazamos el resultado anterior en cualquiera de las ecuaciones originales y hallamos la otra incógnita: Por ejemplo reemplazamos en la primera ecuación $x + y = 4 \longrightarrow 3 + y = 4$
$y = 4 - 3$
$y = 1$

5° Luego la solución es $x = 3$ e, $y = 1$ o bien el par ordenado (3;1) .
Verificación: $x + y = 4$ $x - y = 2$
$3 + 1 = 4$ $3 - 1 = 2$
$4 = 4$ $2 = 2$

6.4. Clasificación

Respecto a la cantidad de elementos del conjunto solución de un sistema tenemos sólo ls siguientes **tres** posibilidades:

- **Solución única:**

  Cuando hay un único valor de x y un único valor de y que cumplen simultáneamente las dos ecuaciones. Geométricamente tenemos dos rectas no paralelas que se cortan en un único punto. En este caso se dice que el sistema es **compatible determinado.**

  Ejemplo:

  $$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

  Es un sistema compatible determinado cuya única solución es: (4;1)

- **Infinitas soluciones:**

  Cuando hay infinitos valores de x o de y que satisfacen las dos ecuaciones. Geométricamente tenemos una misma recta, es decir las dos ecuaciones del sistema representan la misma recta. En este caso el sistema es llamado: **compatible indeterminado.**

  Ejemplo:

  $$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$$

  Si resolvemos por sustitución tenemos:
  $x = 3 + y$

  Reemplazando en la 2° ecuación $2(3 + y) - 2\ y = 6$
  Resolviendo $6+2y - 2y = 6$
  $0 = 6-6$
  $0 = 0 \longrightarrow$ ¡Identidad!

  Llegamos a una identidad lo que nos dice que si representamos ambas rectas, estas coincidirán, es decir ambas ecuaciones se refieren a la misma recta.

Concluimos que las dos ecuaciones son **equivalentes** y quelas rectas son coincidentes.

Es un sistema compatible indeterminado: tiene infinitas soluciones (los infinitos puntos de la recta) que se encuentran dando un valor arbitrario a una de las variables y hallando el correspondiente de la otra.

Son solución del sistema: (0;-3), (1;-2); (2;-1)…

- **Ninguna solución:**

Cuando no hay ningún valor de x e y que cumplan simultáneamente las dos ecuaciones. Geométricamente tenemos dos rectas paralelas que no se cortan. En este caso el sistema se clasifica como **incompatible**.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$$

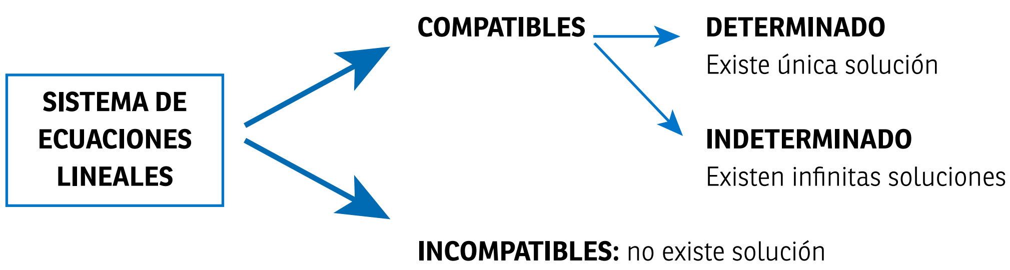
Resolvemos por el método de reducción por suma o resta. Multiplicamos la ecuación 1) por 2 y le sumamos la segunda:

$$\begin{cases} x - y = 3 & 1) \\ 2x - 2y = -4 & 2) \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} 2x - 2y = 6 \\ \underline{2x - 2y = -4} \end{cases}$$

$0 = 10 \longrightarrow$ Llegamos a un absurdo

Este absurdo significa que el sistema no tiene solución, es decir no hay puntos de intersección en las rectas, dichas rectas son paralelas. Decimos, por tanto, que es un sistema **incompatible.**

Resumiendo:



Ejercicios:

1) Resuelva los siguientes sistemas utilizando el método que crea más conveniente y luego clasifíquelos.

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x - 2y = 9 \\ x - y = -11 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y = 4 \\ -3x + 7y = -3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$ j) $\begin{cases} 3x - 5y = 10 \\ 2x + 3y = -6 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x+2y=6 \\ 7x+14y-42=0 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 3x+y=2 \\ 6x+2y=4 \end{cases}$

n) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 4x-2y=14 \end{cases}$

2) Resuelve los siguientes problemas planteando un sistema de ecuaciones lineales.

a) Un fabricante de plaquetas electrónicas obtiene una ganancia de $10 por cada plaqueta que vende y sufre una pérdida de $6 por cada plaqueta defectuosa que debe retirar de mercado. Un día ha fabricado 600 plaquetas obteniendo $2.000. ¿Cuántas plaquetas buenas y cuantas defectuosas ha fabricado ese día?

b) Cuando Cecilia nació, Victoria tenía dos años. La suma de sus edades es 8. ¿Cuántos años tienen?

c) Darío cierra la caja del kiosco y tiene 77 billetes, algunos de $10 otros de $50. Le dice a su novia que tiene en total $2.350 y ella inmediatamente le dice que contó mal. ¿Quién de los dos tiene razón?

d) En un examen tipo test, las preguntas correctas suman un punto y las incorrectas restan medio punto. En total hay 100 preguntas y no se admiten respuestas en blanco (hay que contestar todas).La nota de un alumno es 8.05 sobre 10. Calcular el número de preguntas que contestó correcta e incorrectamente.

e) En un concierto benéfico se venden todas las entradas y se recaudan 23 mil dólares. Los precios de las entradas son 50 dólares las normales y 300 dólares las vip. Calcular el número de entradas vendidas de cada tipo si la concurrencia fue de 160 personas.

f) Una placa radiográfica rectangular tiene un período de 156 cm. y su largo es 6 cm. más que su ancho. ¿Cuáles son las dimensiones de la placa?

g) A un importador de café se le presenta el siguiente problema: si vende café de Brasil a U$S 5 el kilogramo y vende café de Colombia a U$S 8,50 el kilogramo. ¿Cuántos kilogramos de cada café debe usar para lograr 50 kilogramos de una mezcla que pueda vender a U$S 7,10?

h) En un análisis clínico la suma de los linfocitos y los monocitos es de 62%. Y la diferencia de los linfocitos menos monocitos es de 36%. ¿Cuál es el porcentaje de linfocitos y de monocitos en el análisis?

i) Victoria ha comprado un jean que estaba rebajado un 15%. Paula ha comprado otro jean 25 pesos más caro, pero ha conseguido una rebaja del 20 % , con lo que solo ha pagado 8 pesos más que Laura. ¿Cuál era el precio original de cada jean?

j) Francisco dispone de un capital de $80.000, que no los panea utilizar durante un año. Para cubrirse de la inflación colocará una parte a plazo fijo en un banco que ofrece el 20% anual y con la otra parte licitará LEBACS (letras del Banco Central) obteniendo una tasa del 25% anual. Calcule ambas partes sabiendo que el capital acumulado al cabo de un año es de $98.500.

Soluciones 1)

a) (1;1) b) (1;0) c) (2;1) d) ∞ *soluciones* e) $(\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$

f) (-31; -20) g) $(\frac{19}{5};\frac{6}{5})$ h) (0;0) i) *no existe solución* j) (0;-2)

k)(6;0) l)(5;3) m) ∞ *soluciones* n) *no existe solución.*

Soluciones 2)

a) 350 plaquetas buenas y 250 defectuosas.
b) Cecilia tiene 3 años y Victoria 5.
c) Su novia tiene la razón.

d) 87 respuestas correctas y 13 incorrectas.
e) Se vendieron 60 entradas vip y 100 normales.
f) base 19 cm; altura 13 cm.
g) 20 Kg de café de Brasil y 30 Kg de café de Colombia.
h) linfocitos 49%; monocitos 13%.
i) $240 el jean de Victoria sin rebaja, y $265 el de Paula.
j) Colocó $30.000 a plazo fijo y $50.000 en LEBACS.

TEMA 7 EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y POLINOMIOS

Una expresión algebraica es aquella que vincula números y letras por medio de las operaciones aritméticas: suma, resta, producto, cociente, potenciación y radicación.

Por ejemplo, son expresiones algebraicas: $3x^2 + 4; 5x + \frac{7}{y}; \sqrt{2}x + 3y; \frac{3x+5}{x^2-1}$

Las letras que se utilizan se denominan *variables o indeterminadas*, y como su nombre lo indica, pueden tomar cualquier valor que no haga incompatible la expresión.
Según qué operaciones afecten a la o las variables podemos clasificar las expresiones algebraicas en: racionales, irracionales o trascendentes. Las primeras se subdividen a su vez en enteras y fraccionarias.

Fraccionarias
Expresiones Algebraicas
- Racionales
  - Enteras (binomios y polinomios)
  - Fraccionarias
- Irracionales
- Trascendentes

Expresiones Algebraicas Racionales Enteras: son expresiones en las cuales las variables pueden estar afectadas por las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y potenciación con **exponentes enteros no negativos.**
Por ejemplo:

$\sqrt{3}x^2 + \frac{1}{4}x - 7 \; ; 4x^3 + 2x \; ; \; 3\text{-}7t$

Expresiones Algebraicas Racionales Fraccionarias: son expresiones en las que la variable está elevada a exponentes enteros negativos o que tienen variables en el denominador.
Ejemplos:

$\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{7}{x} \; ; \; 3 - 7t^{-3} ; \frac{2x-3}{x+4}$

Expresiones Algebraicas Irracionales: son aquellas en las que la variable esá elevada a un número racional que no es entero.
Ejemplos:

$\sqrt{x} + x^2 + \frac{1}{4}x \; ; 4t^2 + t^{\frac{1}{2}} - 5$

Expresiones Algebraicas Trascendentes: son aquellas en las cuales la variable está afectada por una función trascendente (no algebraica).
Ejemplo:

$sen(2x + 4) \; ; x \ln x + 2$

7.1. EXPRESIONES RACIONALES ENTERAS: MONOMIOS Y POLINOMIOS

7.1.1. Monomio y Polinomio

MONOMIO: es una expresión algebraica en la que solo se involucra el producto y la potencia de exponente natural de las variables. Los factores numéricos de dicha expresión se llaman coeficientes.

Por ejemplo: $5x^7$; $-3x^2 y$; $7x\,y\,z^3$ son monomios, con los coeficientes 5, -3 y 7 respectivamente.

Se llama ***grado de un monomio*** a la suma de os exponentes de las variables intervinientes.

Por ejemplo, los grados de las expresiones anteriores son 7, 3 y 5 respectivamente.

Dos monomios se dicen semejantes si difieren sólo en sus coeficientes. Por ejemplo: $4x^2 y$ es semejante a $-\frac{1}{2}x^2 y$.

POLINOMIO: es una suma algebraica de monomios no semejantes, llamados términos del polinomio.

Ejemplo:

$3x^5 y - 2x + 6$; $\sqrt{2}x^3 + 3x\,y$; $6x + x^4 - \frac{1}{2}x^2$

El ***grado de un polinomio*** está dado por el mayor de los grados de los monomios que lo constituyen. Es decir que los polinomios anteriores son de grado 6, 3 y 4 respectivamente.

Observación: de acuerdo al número de términos es habitual denominar a los polinomios de dos, tres y cuatro términos como binomio, trinomio o cuadrinomio respectivamente

1. Polinomio en una variable.

Definición:

Se llama *POLINOMIO EN LA VARIABLE X* a toda expresión de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots \ + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Con $n \in N_0$ y $a_n, a_{n-1}, \ \dots \ , a_2, a_1, a_0$ números reales, que denominaremos ***coeficientes.***

Si $a_n \neq 0$, decimos que el polinomio tiene ***grado*** n y a_n es el ***coeficiente principal.***

El coeficiente a_0 recibe el nombre de ***término independiente.***
El polinomio cuyos coeficientes son todos ceros recibe el nombre de polinomio nulo y carece de grado.

Ejemplos:

$0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$ es un polinomio nulo.

$-3x^6 + x^4 - 8x^2 - \frac{2}{3}x + 1$ es un polinomio donde los coeficientes son -3, 0, 1, -8, 0, $-\frac{2}{3}$,1; el grado es 6, el coeficiente principal es -3 y el término independiente es 1.

Un polinomio se dice ***completo*** cuando en la expresión aparecen explícitamente todos los términos correspondientes a las potencias de la variable, y ***ordenado*** cuando dichas potencias están expresadas en orden creciente o decreciente.

Ejemplos:

$-2x^6 + x^4 - 7x^2 - \frac{2}{5}x + 1$ es un polinomio de ***grado 6, incompleto y ordenado.***

$3x^5 + x^4 + 6x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 3x + 4$ es un polinomio de ***grado 5, completo y ordenado.***

$-4x + 2x^3 - 5x^7$ es un polinomio de ***grado 7, incompleto y ordenado.***

$-5 + 9x^3 - 7x + 11x^4$ es un polinomio de ***grado 4, incompleto y no ordenado.***

¡Muy importante!

Es posible asociar a cada polinomio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ una única función $P_n(x) = R \rightarrow R$ definida por $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, y recíprocamente, a cada función de esta forma es posible asociar un polinomio.

Llamamos a la función $P_n(x)$ ***función polinómica.***

¿Por qué es una función?

Es una función porque a cada valor real de x, le corresponde un único valor real de $P_n(x)$.

Bajo esta identificación, en lo sucesivo, hablaremos indistintamente de polinomios o funciones polinómicas.

2. Valor numérico de un polinomio.

El valor numérico de un polinomio *P(x)* para **x=a** es el número que se obtiene al reemplazar la variabe **x** por el número **a** y efectuar todas las operaciones indicadas. Se simboliza *P(a)*

2.1 Ceros de un polinomio.

Si al reemplazar *P(a)* = 0 , entonces se dice que el número a es un cero del polinomio *P(x)* .

Ejemplo:

Dado el polinomio $P(x) = 5x^4 + 2x^2 - 7$; tenemos que: $P(2) = 5.2^4 + 2.2^2 - 7 = 81$

Luego si tomamos a=1 y reemplazamos llegamos a $P(1) = 5.1^4 + 2.1^2 - 7 = 0$ y podemos afirmar que en número 1 es un **cero del polinomio** *P(x)*.

3.OPERACIONES CON POLINOMIOS

De igual forma que con los números, los polinomios pueden manipularse y se comportan de manera parecida a los enteros. Es decir, de la misma manera que la suma, la resta y el producto de dos enteros es un entero, la suma, resta y el producto de dos polinomios es un polinomio.

A continuación veremos cómo se pueden realizar las operaciones básicas de adición, sustracción y multiplicación.

Adición:

Calculemos la suma de los polinomios: $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 6$ y $Q(x) = 6x^2 + 7$

Sumar es muy rápido! Solo debemos sumar los coeficientes de los términos semejantes.

Una forma práctica de realizar esta operación es ordenar los polinomios y escribir uno debajo del otro. Si falta algún término intermedio en algún polinomio, lo completamos escribiendo dicho término con coeficiente cero o dejamos el espacio libre.

$$\begin{array}{rrcrrrr} & P(x) & = & 2x^3 & +5x^2 & -7x & +6 \\ + & Q(x) & = & & 6x^2 & & +7 \\ \hline & P(x)+Q(x) & = & 2x^3 & +11x^2 & -7x & +13 \end{array}$$

Sustracción:

Calculamos ahora la resta de los polinomios: $P(x) = 5x^3 - 8x + 4$ y $Q(x) = x^3 - 2x^2 + 2$

Para efectuar la resta de dos polinomios, se suma al polinomio minuendo el opuesto del polinomio sustraendo.

La disposición es similar que la usada para la suma, pero en lugar de escribir Q (x), se escribe el opuesto.

$$\begin{array}{rrcrrrr} & P(x) & = & 5x^3 & & -8x & +4 \\ + & -Q(x) & = & -x^3 & +2x^2 & +x & -2 \\ \hline & P(x)-Q(x) & = & 4x^3 & +2x^2 & -7x & +2 \end{array}$$

<u>**Observación:**</u> El resultado que se obtiene de la suma o la resta de dos polinomios puede ser el polinomio nulo o tener grado menor o igual que el del polinomio de mayor grado que estanos sumando o restando.

Producto o multiplicación:

a) Producto de un polinomio por un número real:

El producto de un polinomio por un número real se resuelve aplicando la propiedad distributiva:

Ejemplo:

Si $P(x) = \frac{11}{3}x^2 - 5x + 1$, hallar $6 \cdot P(x)$:

$$6 \cdot P(x) = 6 \cdot \left(\frac{11}{3}x^2 - 5x + 1\right) = 6 \cdot \frac{11}{3}x^2 - 6 \cdot 5x + 6 \cdot 1 = 22x^2 - 30x + 6$$

b) Producto de dos polinomios:

Para calcular el producto de dos polinomios, la propiedad distributiva es la herramient fundamental. Multiplicamos cada uno de los términos de un polinomio por cada uno de los términos del otro y sumamos.

Para multiplicar los polinomios $P(x) = 4x^2 - 3x + 2$ y $Q(x) = -3x + 4$

utilizaremos la siguiente disposición práctica:

$$\begin{array}{rrrrr} & & 4x^2 & -3x & +2 \\ & & -3x & +4 & \\ \hline & & 16x^2 & -12x & +8 \\ + & -12x^3 & +9x^2 & -6x & \\ \hline & -12x^3 & +25x^2 & -18x & +8 \end{array}$$

En la primer fila debajo de la línea, encontramos el producto de P(x) por 4, y en la segunda, el producto de P (x) por –3 x. Notemos que se van encolumnando los términos semejantes. Por último, efectuamos la suma.

<u>Observación:</u> Cuando se multiplican dos polinomios no nulos el resultado es un polinomio cuyo grado es igual **a la suma de los grados** de los polinomios factores.

$$P(x)\ .\ Q(x) = grado\ de\ P(x) + grado\ de\ Q(x)$$

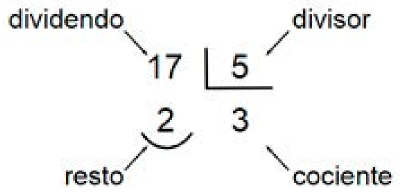
Productos especiales:

- Cuadrado de un binomio $(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$
- Cubo de un binomio $(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$
- Producto de la suma por la diferencia de dos términos $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$

Cociente o división:

Otra operación a tener en cuenta con los polinomios es la división. Para dividir recordemos la división entera entre números, en la cual aplicamos el algoritmo de Euclides:

dividendo = divisor * cociente + resto



Se verifica que 17 = 5 . 3 + 2, y el resto es siempre menor que el divisor.
Ahora, si tenemos por ejemplo los polinomios $P(x) = 10x^4 - 11x^3 + 22x^2 - 53x + 4$ y $Q(x) = 5x - 8$, calculemos $P(x) : Q(x)$

$$\left(10x^4 - 11x^3 + 22x^2 - 53x + 4\right) : (5x - 8) =$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{10x^4} & -11x^3 & +22x^2 & -53x & +4 & \ 5x \quad -8 \\ \cline{6-6}
\underline{-\cancel{10x^4}} & \underline{+16x^3} & & & & \ 2x^3 \quad +x^2 \quad +6x \quad -1 \\
 & \cancel{5x^3} & +22x^2 & & & \\
 & \underline{-\cancel{5x^3}} & \underline{+8x^2} & & & \\
 & & \cancel{30x^2} & -53x & & \\
 & & \underline{-\cancel{30x^2}} & \underline{+48x} & & \\
 & & & -\cancel{5x} & +4 & \\
 & & & \underline{\cancel{5x}} & \underline{-8} & \\
 & & & & -4 & \text{Resto}
\end{array}$$

El procedimiento a seguir es el siguiente:
1. El polinomio dividendo debe escribirse ordenado en forma decreciente y completa.
2. Se divide el primer término del polinomio dividendo por el primer término del polinomio divisor.
3. Se multiplica este resultado por el divisor y se resta del polinomio dividendo.
4. Se bajan los términos necesarios y se repite la operación hasta obtener una expresión de grado menor que el del divisor. Esta última expresión recibe el nombre de resto.

<u>Observación:</u> El grado del polinomio cociente es igual a la diferencia entre el grado del polinomio dividendo y el del polinomio divisor.

4. REGLA DE RUFINI Y TEOREMA DEL RESTO.

Cuando tenemos que dividir un polinomio *P(x)* por uno de la forma *(x-a)* , es conveniente utilizar la denominada **Regla de Ruffini** (Paolo Ruffini, 1765 – 1822, matemático italiano).
Esta regla permite calcular los coeficientes del cociente antes mencionado, veámosla en un ejemplo:

$$\text{Dividir } \left(5x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 10x + 3\right) : (x - 2) =$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 5 & -6 & 9 & -10 & 3 \\ & & & & & \\ 2 & & 10 & 8 & 34 & 48 \\ \hline & \underbrace{5 \quad 4 \quad 17 \quad 24}_{\text{Coeficientes del polinomio cociente}} & & & & 51 \longleftarrow \text{Resto} \end{array}$$

Procedimiento:
1. En la primera fila se escriben los coeficientes del polinomio dividendo, ordenados en forma decreciente y completa (si falta algún término se completa con cero).
2. En el ángulo superior izquierdo se escribe ***a***.
3. Se baja el primero de los coeficientes y se multiplica por ***a***. Este resultado se escribe debajo del siguiente y se efectúa la suma.
4. Se continúa el procedimiento hasta el último coeficiente.

Los números obtenidos son los coeficientes del polinomio cociente, y el último es el resto de la división.
Como ya hemos visto, el grado del polinomio cociente es la diferencia entre el grado del polinomio dividendo y el del polinomio divisor, por lo que, al dividir aplicando la Regla de Ruffini, el grado del cociente es una unidad menor que el grado del divisor.

$$\therefore \left(5x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 10x + 3\right) : (x - 2) = 5x^3 + 4x^2 + 17x + 24 \text{ ; resto} = 51$$

TEOREMA DEL RESTO

"El resto de la división de P(x) por (x – a) es igual a P(a)".

<u>Demostración:</u>
Si *C(x)* es el cociente de *P(x) : (x-a)* y el resto es igual a *R*, entonces se cumple:

P(x) = C(x) · (x-a) + R; haciendo *x = a*:
P(a) = C(a) · (a-a) + R, pero *a-a = 0*, entonces *C(a)* · 0 = 0 ➔ *P(a) = R*

Apliquemos el teorema del resto en el cociente que resolvimos por la regla de Ruffini:

$$\begin{aligned} R &= 5 \cdot 2^4 - 6 \cdot 2^3 + 9 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 3 = \\ &= 5 \cdot 16 - 6 \cdot 8 + 9 \cdot 4 - 20 + 3 = \\ &= 80 - 48 + 36 - 20 + 3 = 51 \end{aligned}$$

Verificamos que *P(a)* = Resto.

El teorema del resto ***puede servir como verificación***, para saber si hemos resuelto correctamente un cociente mediante la regla de Ruffini, pero su aplicación más importante es para averiguar si un polinomio es divisible o no por otro de la forma (x – a), ya que si lo es, el resto de la división será cero y la aplicación del teorema, nos evita el tener que resolver el cociente.

TEOREMA DEL FACTOR (corolario del Teorema del Resto)

A partir del teorema del resto podemos enunciar el Teorema del Factor, el cual puede enunciarse de las siguientes formas:

- "Un polinomio *P(x)* es divisible por *(x-a)* sí y sólo si *P(x)* se anula para *x=a*".
- "*(x-a)* es un factor de *P(x)* si sólo si *P(a) = 0* ".

5. CASOS DE FACTOREO

De manera similar a la descomposición de un número en sus factores primos, se pueden expresar polinomios como el producto de expresiones algebraicas enteras, por cada una de las cuales son divisibles. Según el tipo de factorización aplicada, se acostumbra a efectuar una clasificación, habitual y aceptada, de acuerdo a características particulares. Por tanto, pordemos describir así los siguientes cinco casos de factoreo:

1- FACTOR COMÚN

Una expresión algebraica es factor común de todos los términos de un polinomio cuando figura en todo ellos como factor.

Ejemplos:

$$P(x) = 8x^5 + 5x^4 + x^3 = x^3(8x^2 + 5x + 1)$$

$$Q(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 = 2x^2(x^2 - 3x + 2)$$

$$R(x) = -4x^7 - 8x^3 + 4x^2 + 16x = 4x(-x^6 - 2x^2 + x + 4)$$

Observemos que el procedimiento de extraer el factor común consiste en:
a) Extraer la variable x de cada término elevada a la menor de sus potencias.
b) Extraer un número que es factor de todos los coeficientes.

¡Recordar!Siempre es posible verificar que el producto obtenido es correcto aplicando la propiedad distributiva.

2- FACTOR COMUN POR GRUPO

Algunos polinomios presentan una distribución que nos permiten formar grupos de igual cantidad de términos y sacar factor común en cada uno de esos grupos. Una vez hecho esto, aparece un nuevo factor común en todos los grupos.

$$\underbrace{3x^3 + x^2}_{\text{factor común } x^2} + \underbrace{6x + 2}_{\text{factor común } 2} =$$

$$= x^2(3x + 1) + 2(3x + 1) =$$

$$= (3x + 1)(x^2 + 2)$$

Notemos que han quedado dos términos donde el contenido del paréntesis es factor común.
Se extrajo factor común el paréntesis.
Más ejemplos:

$$P(x) = 7x^5 - 5x^4 + 14x - 10 = (7x^5 - 5x^4) + (14x - 10) =$$

$$= x^4(7x - 5) + 2(7x - 5) =$$

$$= (x^4 + 2)\ (7x - 5)$$

$$Q(x) = x^7 + 3x^3 + 3x^8 + x^2 - 2x^5 - 2 = (3x^8 + x^7 - 2x^5) + (3x^3 + x^2 - 2) =$$

$$= x^5(3x^3 + x^2 - 2) + (3x^3 + x^2 - 2) =$$

$$= (x^5 + 1)\ (3x^3 + x^2 - 2)$$

3- TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Llamamos de esta manera al trinomio tal que, dos de sus términos son cuadrados perfectos y el otro término es el doble producto de las bases de esos cuadrados.

Un trinomio cuadrado perfecto se factoriza expresándolo como el cuadrado de un binomio:
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ejemplos:

$$P(x) = x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2.5x + 5^2 = (x-5)^2$$

$$Q(x) = 4x^2 + 4x^3 + x^4 = (2x)^2 + 2(2x)x^2 + (x^2)^2 = (2x + x^2)^2$$

4-CUATRINOMIO CUBO PERFECTO

Expresión general: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$

Al desarrollar el cubo de un binomio, se obtiene un cuatrinomio cubo perfecto. El método para factorearlo es similar al caso anterior, supongamos que queremos factorear $P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Debemos encontrar dos términos cubos perfectos: $x^3 = (x)^3 \quad 8 = (2)^3$

Después es necesario hacer dos verificaciones:
a) que el triplo del cuadrado de la primera base por la segunda es uno de los términos restantes:
$3(x)^2 2 = 6x^2$
b) y que el triplo de la primera base por el cuadrado de la segunda es el otro término:
$3x(2)^2 = 12x$
Por lo tanto, el cuatrinomio queda factoreado como: $P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3$

5- DIFERENCIA DE CUADRADOS

Todo polinomio que es una diferencia de cuadrados se puede Factorizar como el producto de la suma por la diferencia de sus bases, es decir:

$$a^2 - b^2 = (a-b)\ (a+b)$$

Por ejemplo:

$$P(x) = x^2 - 25 = (x-5)\ (x+5)$$

$$Q(x) = x^4 - 9x^2 = (x^2)^2 - (3x)^2 = (x^2 - 3x)\ (x^2 + 3x)$$

$$R(x) = x^2 - 6 = x^2 - (\sqrt{6})^2 = (x - \sqrt{6})\ (x + \sqrt{6})$$

¡Observación!
Todo número positivo es el cuadrado de su propia raíz.

6.Sumas o restas de potencias de igual exponente

Ejemplo
$X^5 - 32$
Vemos que este polinomio tiene como raíz a 2, porque $2^5 - 32 = 0$
Para factorizar usamos el nº que es "raíz" en la regla de Ruffini
Y luego multiplicamos **(x-raíz). Cociente**
En el ejemplo anterior nos quedaría así

$x^5 + 32$

Aplicamos regla de Ruffini ⇨

	1	0	0	0	0	32
-2		-2	4	-8	16	-32
	1	-2	4	-8	16	0

Cociente: $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$

Se factorea así :
(x - raíz del polin). cociente

$$(x + 2).(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

Factorización aplicando el método de Gauss

- El polinomio debe tener coeficientes enteros
- PROPIEDAD: Si la fracción p/q es una raíz, se cumple que "p" es divisor del término independiente y "q" divisor del coeficiente principal.

PASOS

- Se arman todas las posibles fracciones p/q y se busca alguna que anule el polinomio.
- Luego aplicamos regla de Ruffini para hallar las restantes raíces.

El polinomio factorizado quedará de esta forma:

$a . (x - r_1).(x - r_2). . .(x - r_n)$

Coeficiente principal ***raíces***

EJEMPLO $\mathbf{2x^3 - 3x^2 - 11x + 6}$

Divisores del término independiente 6: p = 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6
Divisores del coeficiente principal 2 : q = 1, -1, 2, -2
Posibles raíces del polinomio:
p/q: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 1/2, -1/2, 3/2, -3/2

si probamos con (-2) , se anula , con lo cual, -2 es una raíz.

Usamos Ruffini y continuamos

	2	- 3	- 11	6
- 2		- 4	14	- 6
	2	- 7	3	0
3		6	- 3	
2	-1	0		
½		1		
	2	0		

RESULTADO $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ = **$2.(x+2).(x-3).(x-\frac{1}{2})$**

Ejercicios para el alumno

Resolver las operaciones

1) $(x - 7)^2 + (2x^3 - 2x + 4) \cdot (2x + 3) =$

2) $(6x^3 - x^2 + 9x + 1) : (3x - 2)$

3) Aplicar regla de Ruffini y teorema del resto:

a) $(2x^3 - 3x + 3) : (x - 2) =$

b) $(x^4 - 2) : (x + 1) =$

c) $(12x^3 - x + 1) : (x - 3) =$

Factorizar los polinomios

a) x2 – 14x + 49=

b) $x^3 + 64 =$

c) $x^3 - 3x + 2 =$

d) $4x^3 - 12x^2 - 16x =$

e) $x^2 - 12x + 36 =$

f) $x^3 + 1000 =$

g) $x^3 - 3x^2 - x + 3 =$

h) $20x^3 - 15x^2 - 10x =$

TEMA 8 LOGARITMOS

Llamaremos logaritmo de un número *b* (positivo) en una base dada a (positiva y distinta de uno), al exponente al que hay que elevar la base para obtener el número.

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \;\text{ con } a > 0\;;\; a \neq 1\;;\; b > 0$$

Algunos ejemplos

a) $\log_5 25 = 2$, porque $5^2 = 25$

b) $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$, porque $49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$

c) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, porque $2^{-3} = \frac{1}{8}$

Nombres:

- **Los logaritmos cuya base es 10, se llaman decimales y se anotan log**
- **Los logaritmos cuya base es el nº irracional e (aproxim. 2,718) se llaman logartimos naturales y se anotan ln.**

RESUMEN DE PROPIEDADES

$$\boxed{\log_a a = 1} \qquad \boxed{\log_a 1 = 0}$$

$$\boxed{\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y} \qquad \boxed{\log_a (x:y) = \log_a x - \log_a y}$$

$$\boxed{\log_a x^y = y.\log_a x}$$

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}.\log_a x}$$

Aclaración

En las calculadoras científicas están las teclas log y ln

Para los logaritmos con otras bases, se aplica el cambio de base

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

Ej. Hallar $\log_2 5$

Hacemos $\frac{\log 5}{\log 2}$ $\cong$**2,32**

RESOLVER

1-Sabiendo que: log M = 0,5   log N = 0,3   log P = 1,2

¿cuánto valen los siguientes?

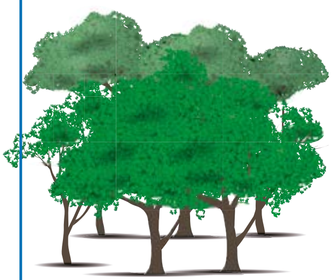
a) Log (M. P: N^4) =
b) Log (P.M) =
c) log (M^2 : P)=
d) log $\sqrt{P}$ =

Problemas aplicados

2) Un bioquímico observa un cultivo de bacterias. Vé que la población de bacterias se puede aproximar mediante la fórmula **P= 15. $e^{0,4\,t}$** , en la cual " P" indica miles de bacterias a partir de las 7 AM, y " t " indica las hs después de las 7 AM

a) Calcular cuántas bacterias había en los sig horarios: 7 AM, 9 AM y 10 AM

b) ¿Cuánto tiempo pasará para que la población de bacterias sea el doble de la que había a las 10 AM?



(3) La masa de árboles de un bosque es de 5000 toneladas (en el año fijado como inicial, t=0) y por efecto de la deforestación, decrece un 9 % cada dos años. ¿Cuál de las siguientes fórmulas permite hallar la masa de árboles que va quedando luego de transcurridos "t" años?

a) M_{final}= 5000. $1,09^t$ b) M_{final}= 5000. $0,91^t$

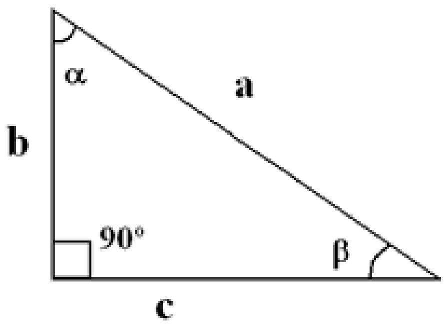
c) M_{final}= 5000 . $1,09^{t/2}$ d) M_{final}= 5000 .$0,91^{t/2}$

TEMA 9 TRIGONOMETRÍA

1. Introducción: el triángulo rectángulo.

Se denomina triángulo rectángulo a cualquier triángulo con un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90 grados.

En este tipo de triángulos el lado de mayor longitud (que será siempre el lado opuesto al ángulo de 90°) recibe el nombre de **hipotenusa** y a los otros dos lados se llaman **catetos.**



2. Suma de los ángulos interiores.

Para resolver los ejercicios práctico debemos también recordar el siguiente concepto:
"La suma de los ángulos interiores de un triángulo vale 180°". Por tanto en un triángulo rectángulo:

$$\beta = 90° - \alpha$$

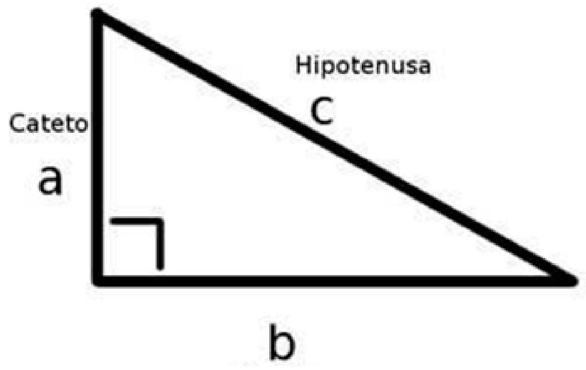
Ejemplo:
Si sabemos qué $\alpha = 60°$, entonces hacemos $\beta = 90° - \alpha \rightarrow \beta = 90° - 60°$
$\beta = 30°$

3. Teorema de Pitágoras:

"En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Ejemplo:

Si tenemos que a = 9 y b = 12, calculamos el valor de cde la siguiente manera:

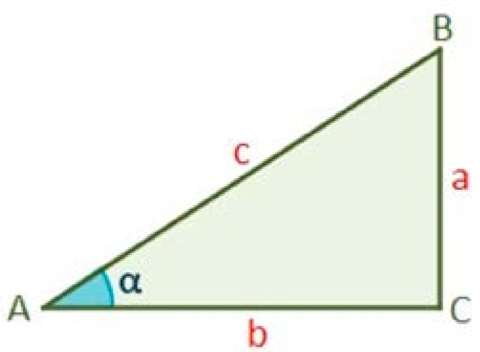
$$c^2 = 9^2 + 12^2$$
$$c = \sqrt{81 + 144}$$
$$c = \sqrt{225}$$
$$c = 15$$

4. Funciones Trigonométricas

Las **funciones trigonométricas** *f* son aquellas que están asociadas a una razón trigonométrica.

Las **razones trigonométricas** de un ángulo α son las obtenidas entre los tres lados de un triángulo rectángulo. Es decir, las comparaciones por su cociente de sus tres lados *a*, *b y c.*

Existen seis **funciones trigonométricas** que describiremos a continuación:



1) Seno:
El seno de un ángulo α se define como la razón entre el cateto opuesto (a) y la hipotenusa (c).

$$sen\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

2) Coseno:
El coseno de un ángulo *α* se define como la **razón** entre el cateto adyacente (*b*) y la hipotenusa (c).

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

3) Tangente:
La **tangente** de un ángulo *α* es la **razón** entre el cateto opuesto (*a*) y cateto adyacente (*b*).

$$\tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{a}{b}$$

4) Cosecante:
Es la razón trigonométrica recíproca del seno.
La **cosecante** del ángulo *α* de un triángulo rectángulo se define como la razón entre la hipotenusa (c) y el cateto opuesto (a)

$$\operatorname{cosec}\ \alpha = \frac{1}{sen\alpha} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{c}{a}$$

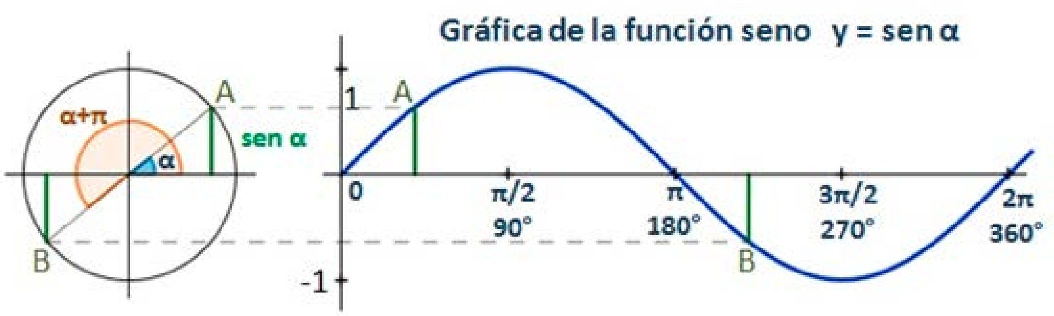
5) Secante:
La **secante** de un **ángulo** *α* de un triángulo rectángulo se define como la **razón** entre la hipotenusa (c) y el cateto adyacente (b).

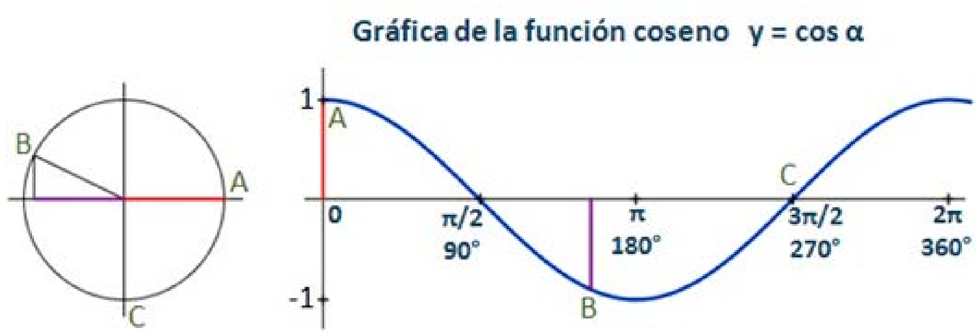
$$\sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{c}{b}$$

6) Cotangente:
La **cotangente** de un **ángulo** *α* de un triángulo rectángulo se define como la **razón** entre el cateto adyacente (*b*) y el cateto opuesto (*a*).

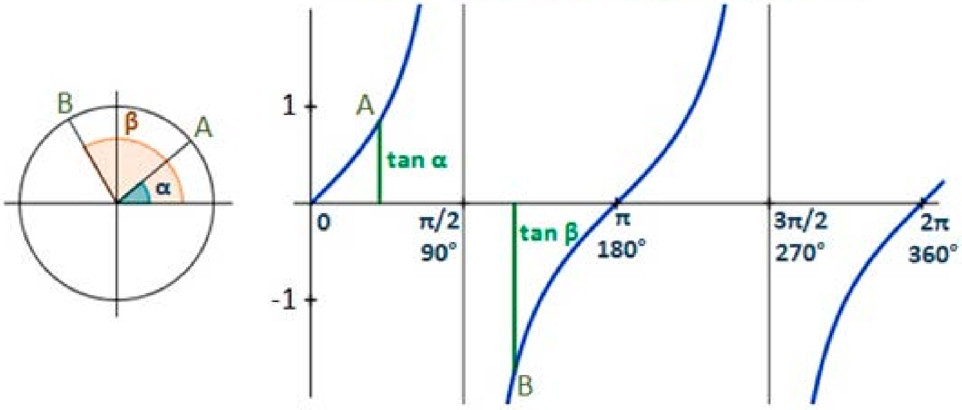
$$\cot\ \alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{b}{c}$$

Gráficas de las funciones trigonométricas:

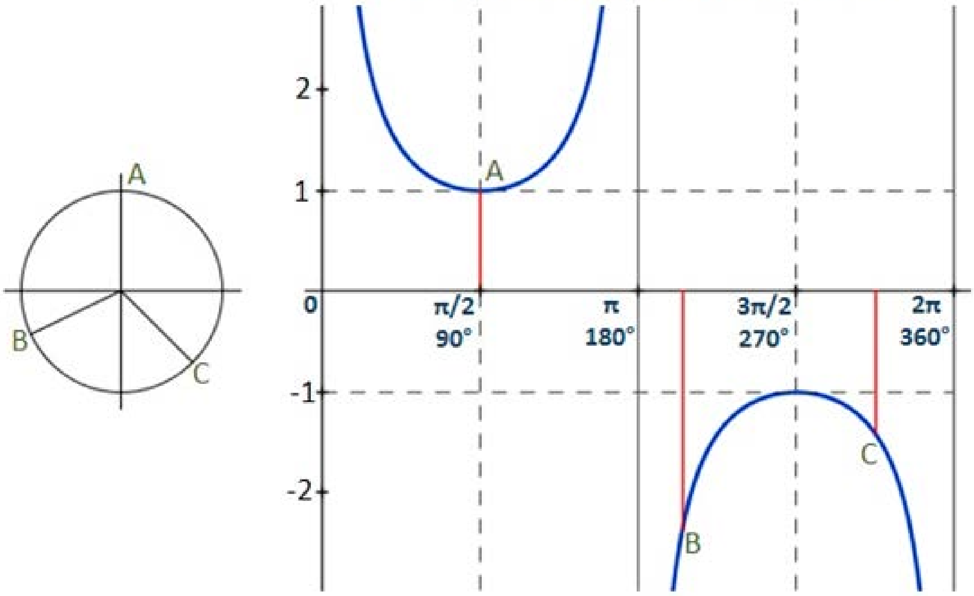




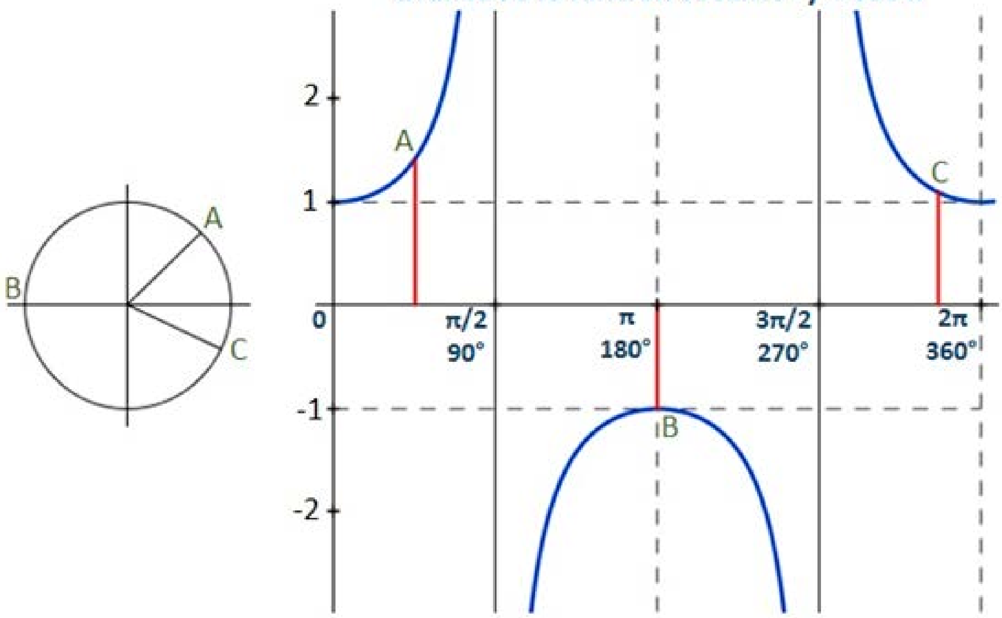
Gráfica de la función tangente y = tan α

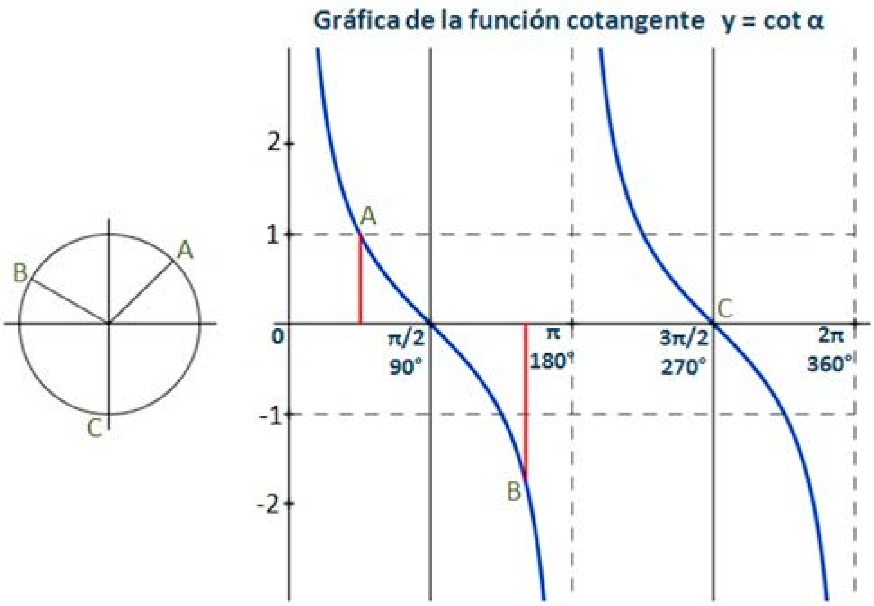


Gráfica de la función cosecante y = csc α

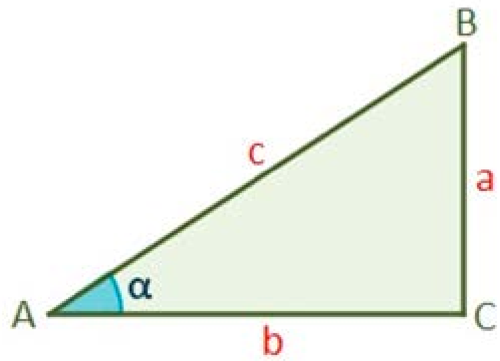


Gráfica de la función secante y = sec α





Ejemplo Práctico:



Veamos ahora cómo hallar los ángulos de un triángulo si se conocen sus lados.
Analicemos el siguiente ejemplo:
Supongamos que: $a = 3$ y $b = 4$

De la definición de funciones trigonométricas

tenemos que: $\tan \alpha = \frac{3}{4}$

Denotamos por: $\alpha = \text{arc } \tan \frac{3}{4}$ el ángulo agudo

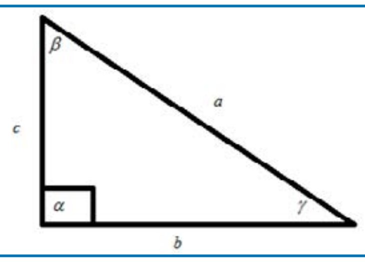
cuya tangente es $\frac{3}{4}$.

Su valor numérico: $\alpha = 36{,}86° = 36°\ 51'\ 36''$ puede ser hallado utilizando la calculadora.
Si calculamos c utilizando Teorema de Pitágoras también podríamos llegar al valor de α aplicando las funciones seno y coseno:

$$c = \sqrt{4^2 + 3^2} \qquad sen\ \alpha = \frac{3}{5}$$
$$c = \sqrt{16+9}$$
$$c = \sqrt{25} \quad \overrightarrow{c = 5} \quad \cos\ \alpha = \frac{4}{5}$$

Verifique que llegamos al mismo resultado.

Ejercicios:



1) Resolver los siguientes triángulos:

a) $a = 5\ cm$, $\beta = 30°$, $\alpha = 90°$
b) $b = 2\ cm$, $c = 5\ cm$, $\alpha = 90°$
c) $b = 82\ cm$, $\gamma = 57°$, $\alpha = 90°$

2) Hallar el área de un triángulo rectángulo en el cual un ángulo mide 30° y la hipotenusa mide 4.

3) Cuando el ángulo de elevación del sol sobre el horizonte es de 30°, una torre proyecta una sombra de 75 m. Calcular su altura.

4) ¿Qué largo tiene la sombra que arroja un mástil de 11 m de altura cuando el sol tiene una elevación de 20°?

5) El hilo que sujeta un barrilete mide 250 m y forma un ángulo de 32° con la vertical. Hallar la altura a que se halla si se supone que el hilo está en línea recta.

6) Un automóvil asciende una cuesta que tiene una inclinación de 22°. Si viaja a una velocidad de 60 km/h, ¿Cuántos metros varía su altura sobre el nivel del mar en 15 minutos?

7) Se piensa construir una pista de aviación y debido a la orientación elegida se ve que al final de la misma quedará una arboleda de 25 m de altura ¿A qué distancia mínima de la arboleda debe terminar la pista si el ángulo de despegue de los aviones es de 16°?

8) En un triángulo sabemos que la hipotenusa mide 4 cm y que la tangente del ángulo que esta determina con la base es igual a 0,2. Calcula el área de dicho triángulo.

9) Un poste de teléfono está sujeto por varios cables que parten del extremo superior. Uno de estos cables está atado a una estaca situada a 5 m del pie del poste y forma con la horizontal un ángulo de 60°. Calcular la altura del poste y la longitud del cable.

10) Para conocer la altura de una torre se ha medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal obteniendo 43° al acercarse 15 metros hacia la torre, se obtiene un nuevo ángulo de 57°. ¿Cuánto mide la altura de la torre?

11) Desde un acantilado de 50 metros se ve un barco bajo un ángulo de 70° con la vertical. ¿A qué distancia se encuentra el barco?

12) Un árbol y un observador se encuentran en orillas opuestas de un río. El observador mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del árbol y obtiene 35°, retrocede 10 metros y mide el nuevo ángulo, obteniendo un resultado de 25 metros. ¿Qué altura tiene el árbol?

Soluciones:

1) a) $b = 2,5\ cm$, $c = 4,33$, $\gamma = 60°$

b) $a = 5,385\ cm$, $c = 4,33$ cm, $\beta = 21°\ 48'\ 5''$

c) $a = 150,5584\ cm$, $c = 126,2689 cm$, $\beta = 33°$

2) A=$\sqrt{3}$ unidades de área.
3) H=43.30 m.
4) l =30,22 m.
5) h=212,01 m.
6) 5619,1 m.
7) l =87,17 m.
8) A=1,54 cm^2 .
9) h=8,66 m; l =10 m.
10) h=35,46 m.
11) 137,37 m.
12) 13,95 m.

Ejercicios. Práctica de Polinomios

1) Ordenar y completar los polinomios dados:

$a)\ -3x^2+4x^5-2$

$b)\ -10+\frac{1}{4}x^3-\frac{2}{7}x^2-6x^5$

$c)\ x^6+4x^2-2x^7$

2) Sea $P(x)=x^4-2x^3+x^2-x+1$. Halle $P(0)$; $P(1)$; $P(-2)$.

3) Dados los polinomios $P(x)=3x^3-2x^2+5x-4$; $Q(x)=2x-7$; $R(x)=3x^2+7x-2$ calcule:

a) $P(x)-Q(x)+R(x)$

b) $P(x)\ .\ Q(x)$

c) $3\left[P(x)+Q(x)\right]-R(x)\ .\ P(x)$

4) Dados los polinomios $P(x)=4x^3-2x^2+x-1$; $Q(x)=-3x^2-4x^2-x$; $R(x)=x^3-x^2+1$, calcule:

a) $P(x)-Q(x)+R(x)$

b) $P(x)\ .\ Q(x)+R(x)$

c) $\left[P(x)\ .\ Q(x)\right]+R(x)$

5) Realice las siguientes divisiones. Halle el resto R(x) y cociente C(x).

a) $\left(x^2-4x+3\right):\left(x-1\right)$

b) $\left(3x^2+x-5\right):\left(x+2\right)$

c) $\left(6x^5-3x^4+2x\right):\left(x+1\right)$

d) $\left(x^3-x^2+2x-3\right):\left(x^2+x-1\right)$

6) Resuelva aplicando la Regla de Ruffini:

a) $\left(3x^3+13x^2-13x+2\right):\left(x-1\right)$

b) $\left(3x^5-4x^4-6x^2-7x\right):\left(x+2\right)$

c) $(x^6-3):(x-2)$

7) Hallar el resto de las siguientes divisiones sin efectuarlas (aplicar el Teorema del Resto):

a) $\left(2x^5+x-60\right):\left(x-2\right)$

b) $(9x^7+27x^6-5x+7):(x+3)$

c) $(3x^{11}+4x^6-5x^3-1):(x+1)$

8) Factorice los siguientes polinomios:

$a)\ 3(x-2)-x=8$

$b)\ 4(-x-1)+5x-2=-2x-x$

$c)\ 6x+2(1+x)=3x-8+x-2$

$d)\ -5(x+8)+2=-38-3x-2x$

$e)\ 13x-2(5x+2)=2(x+2)+x$

$f)\ \dfrac{2x}{3}+2=4$

$g)-2\dfrac{x+1}{3}=2-x$

$h)\ 4-\dfrac{-4-x}{-3}=10$

$i)\ x+\dfrac{2x-3}{9}+\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{12x+4}{9}$

$j)\ \dfrac{x-2}{x+3}-\dfrac{x+1}{x-3}=\dfrac{5}{x^2-9}$

$k)\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{x}{3}-\dfrac{-2x+9}{4}$

$l)\ \dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x+5}{x^2-1}=\dfrac{x}{x+1}$

9) Reduce a la mínima expresión:

$a)\ \dfrac{(x+1)^3}{x^2-1}$

$b)\ \dfrac{x^2-25}{2x-10}$

$c)\ \dfrac{x^2-7x+6}{x^2-x}$

$d)\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{x}{x+1}$

$e)\ \dfrac{x}{x^2-y^2}+\dfrac{2}{x+y}-\dfrac{1}{y-x}$

$f)\ \dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}$

Soluciones:

2) -1; 0; 39

3) a) $3x^3-2x^2+7x-11$

b) $6x^4-25x^3+24x^2-43x+28$

c) $-9x^5-15x^4+14x^3-33x^2+59x-41$

4) a) $8x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

b) $-12x^6 + 22x^5 - 15x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x + 3$

c) $-12x^3 + 10x^2 - 5x + 8$; resto $-3x^2 + 4x - 6$

5) a) $C(x) = x - 3$; $R(x) = 0$

b) $C(x) = 3x - 5$; $R(x) = 5$

c) $C(x) = 6x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 9x + 11$; $R(x) = -11$

d) $C(x) = x - 2$; $R(x) = 5x - 5$

6) a) $C(x) = 3x^2 + 16x + 3$; $R(x) = 5$

b) $C(x) = 3x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 46x + 85$; $R(x) = 170$

c) $C(x) = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32$; $R(x) = 61$

7) a) $resto = 6$

b) $resto = 22$

c) $resto = 5$

8)

$a)2x(2x \quad 3);\ b)(2x+1)(2x-1);\ c)(x-2)(x^2+4);\ d)(3x-5)^2$

$e)3(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})\ ;\ f)(x+c)(2x-3b)\ ;\ g)(3-2a)(y^2+x-2);$

$h)(x+2)^3;\ i)(4x+3)^3\ ;\ j)(x-2)(x^2+2x+4)\ ;\ k)(x-\frac{1}{2})(x^5+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x+\frac{1}{32})$

9) $a)\ \dfrac{(x+1)^2}{x-1}\ ;\ b)\ \dfrac{x+5}{2}\ ;\ c)\ \dfrac{x-6}{x}\ ;\ d)\ \dfrac{x+5}{2}\ ;\ e)\ \dfrac{4x-y}{x^2-y^2};\ f)\ \dfrac{x}{x-1}$

ANEXO

LETRAS GRIEGAS

	Minúscula	Mayúscula		Minúscula	Mayúscula
alfa	α	Α	**nu**	ν	Ν
beta	β	Β	**xi**	ξ	Ξ
gamma	γ	Γ	**ómicron**	ο	Ο
delta	δ	Δ	**pi**	π	Π
épsilon	ε	Ε	**rho(ro)**	φ	Ρ
zeta	ζ	Ζ	**sigma**	σ	Σ
eta	η	Η	**tau**	τ	Τ
theta (tita)	θ	Θ	**Ípsilon**	υ	Υ
iota	ι	Ι	**phi(fi)**	φ	Φ
kappa	κ	Κ	**ji o chi**	χ	Χ
lambda	λ	Λ	**psi**	ψ	Ψ
mu	μ	Μ	**omega**	ω	Ω

ANEXO — SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

Ref	SÍMBOLO	SIGNIFICADO
1	$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales
2	Z	Conjunto de los números enteros
3	Q	Conjunto de los números racionales
4	$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
5	C	Conjunto de los números complejos
6	R^+	Conjunto de los reales positivos
7	$\{a,b,...\}$	Conjunto de elementos a, b,...
8	$\varnothing$	Conjunto vacío
9	$\cap$ ∩	Intersección de conjuntos
10	$\cup$ ∪	Unión de conjuntos
11	$\subset$	Incluido en el conjunto
12	$\not\subset$	No incluido en el conjunto
13	$\in$	Pertenece a un conjunto
14	$\notin$	No pertenece a un conjunto
15	$\{x / x \in P\}$	Todos los x que satisfacen P
16	$\{x:...\}$	Todos los x tales que... es cierto
17	(a,b)	Intervalo abierto
18	$[a,b]$	Intervalo cerrado
19	$[a,b)$, $(a,b]$	Intervalo semiabierto
20	$(a,\infty),[a,\infty)$	Semirrecta derecha
21	$(-\infty,a),(-\infty,a]$	Semirrecta izquierda
22	$(-\infty,\infty)$	Recta real
23	$=$	Igual
24	$<$	Menor que...
25	$\leq$	Menor o igual que...
26	$>$	Mayor que...
27	$\geq$	Mayor o igual que...
28	$\neq$	Distinto
29	$\propto$	Proporcional a ...
30	$\approx$	Aproximadamente igual
31	$\pm$ $\mp$	Más menos/ menos más
32	$\sum$	Sumatoria
33	$\prod$	Producto
34	$\forall$	Para todo, cuantificador universal
35	$\exists$	Existe, cuantificador existencial
36	$\Rightarrow$	Implica (si... entonces...)
37	$\Leftrightarrow$	Equivale (si solo si)
38	$/$	Tal que
39	$\therefore$	Por lo tanto, por consiguiente
40	$\because$	Porque, puesto que

Ref	SÍMBOLO	SIGNIFICADO
41	$\neg$	Negación
42	$\wedge$	Conjunción ("y", "además")
43	$\vee$	Disyunción ("o")
44	∞	Infinito
45	$a = \dot{b}$	***a*** es múltiplo de ***b***
46	$\|x\|$	Valor absoluto
47	$\sqrt{\ }$	Raíz cuadrada
48	$\%$	Tanto por ciento
49	$^0/_{00}$	Tanto por mil
50	π	Número pi π = 3,1415...
51	e	Número e, ***e*** = 2.7182...
52	$\|\|$	Paralelo
53	$\perp$	Perpendicular
54	$\log$	Logaritmo decimal
55	$\log_a$	Logaritmo decimal base ***a***
56	$\ln$	Logaritmo neperiano (base e)
57	$\sin\alpha$	Seno de α
58	$\cos\alpha$	Coseno de α
59	$tg\alpha$	Tangente de α
60	$cotg\alpha$	Cotangente de α
61	$\sec\alpha$	Secante de α
62	$\cos ec\alpha$	Cosecante de α
63	(a_n)	Sucesión con término n-ésimo
64	Δ	Incremento

ANEXO BIBLIOGRAFÍA

- Betina Duarte (2001): "Matemáticas para ingresar a la Universidad", Buenos Aires, Ed. Granica S.A.

- Juan Ignacio Fuxman Bass (2010): "Resolviendo problemas de Matemáticas", Buenos Aires, Ed. Red Olímpica.

- Altman S.; Anejo M.; Comparatore C y Kurzok L. (2012): "Iniciación al Álgebra y al estudio de funciones 1 y 2", Buenos Aires, Ed. Tinta Fresca.

- Berio Adriana Beatriz (2015): "Matemática 4 ¿Para qué sirve?", Buenos Aires, Ed. Puerto de Palos.

- Walter Fleming, Dale Varberg (1991): "Algebra y trigonometría con geometría analítica", México, Ed. Prentice-Hall.

- Timothy J. Kelly, John T. Anderson, Richard H. Balomenos (1996): Algebra y trigonometría: precálculo", México, Ed. Trillas.

- Richard O. Hill (1997): "Algebra lineal elemental con aplicaciones", México, Ed. Prentice-Hall Hispanoamérica.

UNER

www.uner.edu.ar

uneroficial

uneroficial

UNER Play

Canal 20 Universidad Nacional de Entre Ríos